

CTDS: Maths discrètes.

Une applicat° $f: E \mapsto F$ est l'association d'un $x \in E$ à un $y \in F$, $y = f(x)$.

• Egalité: $f = g \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$

• Le graphe de $f: E \mapsto F$ est: $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F\}$

• Composition: Soient $f: E \mapsto F$ et $g: F \mapsto G$ deux app.

alors l'applicat° $g \circ f: E \mapsto G$ définie par

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \forall x \in E$ est la composition de f et g .



Restrict°. Soit $f: E \mapsto F$ une application et $A \subset E$.

Alors la restriction de f à A est l'applicat°:

$$f|_A: A \mapsto F \\ x \mapsto f(x)$$

Exemples

① L'identité: $\text{id}_E: E \rightarrow E$
 $x \mapsto x$

② Soient $f:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$

$g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $y \mapsto \frac{y-1}{y+1}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = g(y) = \frac{y-1}{y+1} = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{1-x}{1+x}$$

Image directe, image réciproque

Soient E, F deux ensembles

① Soient $A \subset E$ et $f: E \rightarrow F$.

L'image directe de A par f est l'ensemble:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

② Soient $B \subset F$ et $f: E \rightarrow F$.

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Antécédent Soit $y \in F$. Tout élément $x \in E$ tq $f(x) = y$ est appelé antécédent de y par f .

x est un antécédent de $y \Leftrightarrow f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\})$

(in/sur/bi)jection

(i) f est injective $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, (f(x)=f(x') \Rightarrow x=x')$

(ii) f est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x)=y$.

Remarque

• $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Par conséquent, f injectif $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

f surj $\Leftrightarrow f(E) = F$

f bij $\Leftrightarrow f$ inj \wedge f surj

Remarque : f bij $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x)=y$

* Proposition 1 : Soit $f: E \rightarrow F$

① f est bij $\Leftrightarrow \exists g: F \rightarrow E$

tg $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$

② Si f est bijective, il existe une unique app $g: F \rightarrow E$ appelée bij réciproque, noté f^{-1}

* $(f^{-1})^{-1} = f$.

* Proposition 2

Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux app. bij.

$$\text{d'où : } (g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Exo 2.14.

1. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$ $f(x) = x + 7$

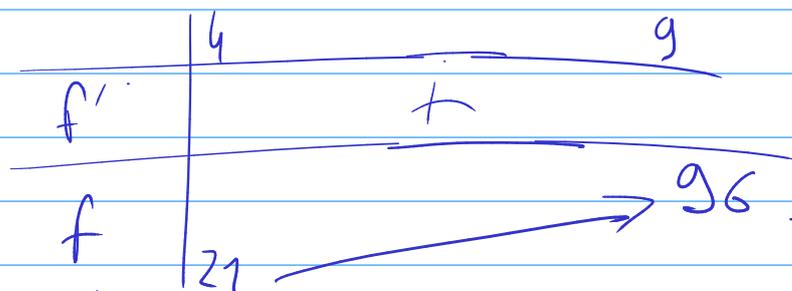
$$\text{On a } y = f(x) \Leftrightarrow x = y - 7.$$

Donc $\exists ! x \in \mathbb{R}$ tq $y = f(x)$. De plus, $f^{-1}(y) = y - 7$

2. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$.

On a $y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 + 2x - 3$. $\Delta >$ Donc pas injective
pas surj car $-5 \notin f(A)$.

$A = [4; 9]$ $B = [21; 96]$. $f(x) = x^2 + 2x - 4$



bijjective!

