CTDS : Maths discrètes.

Une applicat° $f : E \mapsto F$ est l'association d'un $x \in E$ à un $y \in F$, $y = f(x)$.

- Egalité : $f = g \iff \forall x \in E, f(x) = g(x)$
- Le graphe de $f : E \mapsto F$ est : $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F\}$
- Composition : Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux app. alors l'applicat° $g \circ f$ $E \mapsto G$ définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\forall x \in E$ est la composition de f et g.

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

Restrict° : Soit $f : E \mapsto F$ une application et $A \subset E$. Alors la restriction de f à A est l'applicat° :

$$f|_A : A \mapsto F$$
$$x \mapsto f(x)$$

Exemples

① L'identité : $id_E : E \mapsto E$
$x \mapsto x$

② Soient $f :]0;+\infty[\mapsto]0;+\infty[$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$

$g :]0;+\infty[\mapsto \mathbb{R}$
$y \longmapsto \frac{y-1}{y+1}$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = g(y) = \frac{y-1}{y+1} = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{\frac{1-x}{\cancel{x}}}{\frac{1+x}{\cancel{x}}} = \frac{1-x}{1+x}$$

Image directe, image réciproque

Soient E, F deux ensembles

① Soient $A \subset E$ et $f : E \mapsto F$.

L'image directe de A par f est l'ensemble :

$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

② Soient $B \subset F$ et $f : E \mapsto F$.

$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$

<u>Antécédent</u> Soit $y \in F$. Tout élément $x \in E$ tq $f(x) = y$ est appelé antécédent de y par f.

x est un antécédent de $y \Leftrightarrow f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\})$

(in/sur/bi)jection

(i) f est injective $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, \ (f(x)=f(x') \Rightarrow x=x')$

(ii) f est surjective si $\forall y \in F, \ \exists x \in E, \ f(x)=y$.

Remarque

- $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Par conséquent, f injectif $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, \ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

f surj $\Leftrightarrow f(E)=F$

f bij $\Leftrightarrow f$ inj $\wedge$ f surj

Remarque : f bij $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists! x \in E, f(x)=y$

* **Proposition 1** : Soit $f : E \mapsto F$

① f est bij $\Leftrightarrow \exists g : F \mapsto E$

tq $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$

② Si f est bijective, il existe une unique app $g : F \longmapsto E$ appelée bij réciproque, notée f^{-1}

* $(f^{-1})^{-1} = f$.

* Proposition 2

Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux app bij.

alors : $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Exo 2.14.

1. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x + 7$

On a $y = f(x) \Leftrightarrow x = y - 7$.

Donc $\exists ! x \in \mathbb{R}$ tq $y = f(x)$. De plus, $f^{-1}(y) = y - 7$

2. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ $\quad A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$.

On a $y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 + 2x - 3$. Δ) Donc pas injective

pas surj car $-5 \notin f(A)$.

$A = [4;9]$ $B = [21;96]$. $\quad f(x) = x^2 + 2x - 4$

x	4		9
f'		$+$	
f	21	$\nearrow$	96

bijective !