Ctd Maths discrètes.

Prof : Viet-Anh NGUYEN : viet-anh.nguyen@univ-lille.fr.

* ch1 : Somme, récurrence, raisonnement (1 semaine)
* ch2 : Logique, ensemble, application (2 s).
* ch3 : Combinatoire (2 s)
* ch4 : Arithmétique (4 s).

Contrôle de connaissance.

2 interro écrites (30 minutes) (octobre, novembre).
Exam final : 2h (fin décembre)

Chapitre 1 : Somme, récurrence, raisonnement.

Exo 1.1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

* $\sum_{k=2}^{n+2} 5k = 5\sum_{k=2}^{n+2} k = 5\left(\sum_{k=1}^{n+2} k\right) - 1 = 5\frac{(n+2)(n+3)}{2} - 1$

$= \frac{5(n^2+5n+4)}{2}$.

* $\sum_{k=1}^{n}(2k+n-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} n-1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} n-1 = \cancel{2}\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + n(n-1)$

$= n(n-\cancel{1}+n+\cancel{1}) = 2n^2$.

* $\left(\sum_{k=0}^{n} 3^k\right) - 1 = \frac{1-3^{n+1}}{-2} - 1 = \frac{1-3^{n+1}-2}{-2} = \frac{3^{n+1}-3}{2}$

* $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)2 = 2 - \frac{1}{2^n}$.

* $\prod_{k=1}^{n} 7^k = 7^{1+2+3+\dots+n} = 7^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Exo 1.2.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

(1) * $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^3 - k^3) = \cancel{1^3} - 0^3 + 2^3 - \cancel{1^3} + \dots + (n+1)^3 - n^3 = (n+1)^3$

* $(k+1)^3 - k^3 = \cancel{k^3} + 3k^3 + 3k + 1 - \cancel{k^3}$

$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=0}^{n} 3k^3 + 3k + 1 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + k + 1 = 3\sum_{k=0}^{n}(k^2+k) + 3(n+1)$.

$= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{3(n(n+1))}{2} + 3(n+1)$

$= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1) + 2\times 3(n+1)}{2} = \frac{3n((2n+1)+(n+1))}{2}$

$= \frac{3n(3n+2)}{2} + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 = (n+1)^3$

$$\iff 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = S_n$$

(2)

$$S_n = \frac{(n+1)^3 - \frac{(n+1)(3n+2)}{2}}{3} = \frac{(n+1)\left(2(n+1)^2 - (3n+2)\right)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 \cancel{+4n} \cancel{+2} \cancel{-3n} \cancel{-2})}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.3 à la maison.

1.4.

Mq : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_n)\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$ s'écrit $u_n = \frac{2}{2n+1}$

Initialisat°. pour $n=0$.

$$u_0 = \frac{2}{2\times 0+1} = 2. \text{ Vrai}$$

Hérédité :

On suppose $P(n)$ vraie, montrons $P(n+1)$.

$$u_n = \frac{2}{2n+1}. \quad \text{(HR)}.$$

$$u_{n+1} = \frac{\frac{2}{\cancel{2n+1}}}{1+\frac{2}{\cancel{2n+1}}} = \frac{2}{2n+3} = \frac{2}{2(n+1)+1} \quad \text{ok}$$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_n)\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$ s'écrit $u_n = \frac{2}{2n+1}$