

(3) En déterminant le coefficient de $x^p y^{n+m-p}$ dans $(x+y)^{n+m}$ et dans $(x+y)^n(x+y)^m$, démontrer l'égalité :

$$\binom{n}{0}\binom{m}{p} + \binom{n}{1}\binom{m}{p-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{p-2} + \dots + \binom{n}{p}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{p}$$

(4) En déduire que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$(x+y)^{n+m} = (x+y)^n (x+y)^m$$

de coeff de $x^p y^{n+m-p}$ au membre de gauche est : $\binom{n+m}{p}$
 de coeff de $x^p y^{n+m-p}$ au membre de droite est : $\sum_{i+j=p} \binom{n}{i} \binom{m}{j}$
 Donc on a $\binom{n+m}{p} = \sum_{i+j=p} \binom{n}{i} \binom{m}{j}$

en mettant $m=n$ et $p=n$, on a :

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

$$\forall k, \binom{n}{k} = \binom{n-k}{k} \quad \forall k, 0 \leq k \leq n,$$

Exercice 3.13. (1) Si $n = 3$ et $0 \leq k \leq 3$, calculer $\binom{3}{k}$. Vérifier ensuite que

$$\binom{3}{0}^2 + \binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 + \binom{3}{3}^2 = \binom{6}{3}$$

$$\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3} = 1, 3, 3, 1.$$

$$\binom{6}{3} = 20, \quad 1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 1 + 9 + 9 + 1 = 20$$

Exercice 3.12. Énoncer puis prouver la formule du binôme de Newton.

Réurrence.

Hérédité :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \text{par linéarité de la somme on a}$$
$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} (x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^n y^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^n y^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^n y^{n+1-k}$$

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$$

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}$$

$$\frac{n!}{(n-p)p(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-p+1)p n!}{(p-1)!(n-p+1)!} = \frac{n!(1+p(n-p+1))}{(p-1)!(n-p+1)!}$$



