

* Divisibilité, Bezout.

Définit°:

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$.On dit que b divise a si : $\exists m \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bm \Leftrightarrow b|a$.

Propriétés:

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- ①. Si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$
- ②. Si $a_1|b_1$ et $a_2|b_2$, alors $a_1 b_1 | a_2 b_2$.
- ③. Si $a|b$, alors $a|kb$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
- ④. Si $a|b$ et $a|c$, alors $a|b \pm c$.
- ⑤. $1|a$ et $a|0$.

Preuve ①.

Comme $a|b$ et $b|c$, $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tq $b = ma$ et $c = nb$
 $c = nb = nma$, d'où $c = (nm)a$ et $a|c$.

② Comme $a_i|b_i$, $\exists m_i \in \mathbb{Z}$ tq $b_i = m_i a_i$ il vient que $b_1 b_2 = m_1 a_1 m_2 a_2 \Rightarrow b_1 b_2 = (m_1 m_2) a_1 a_2 \Rightarrow a_1 a_2 | b_1 b_2$.

③ facile

④ Comme $a|b$, $\exists m \in \mathbb{Z}$ tq $b = ma$ Comme $a|c$, $\exists n \in \mathbb{Z}$ tq $c = na$.il vient donc que $b \pm c = ma \pm na = (n \pm m)a \Rightarrow a|b \pm c$.⑤ $a = 1 \cdot a \Rightarrow 1|a$; $a \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0|a$.

Théorème de la division euclidienne entière.

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Alors : $\begin{cases} \exists ! q, r \in \mathbb{Z} \text{ tq } a = bq + r, \\ 0 \leq r < |b|. \end{cases}$

On dit que a est la division euclidienne de a par b .

Exercice 4.1. En divisant un nombre par 8, un élève a obtenu 4 pour reste; en divisant ce même nombre par 12, il a obtenu 3 pour reste. Qu'en pensez-vous?

$$\begin{aligned} n &= 8q + 4 \\ n &= 12q' + 3 \end{aligned} \quad \begin{cases} n = 8q + 4 \\ n = 12q' + 3 \end{cases}$$

$$8q + 4 - 12q' - 3 = 0.$$

$$8q - 12q' + 1 = 0.$$

$$4(2q - 3q') = -1 \quad \cdot \quad 2q - 3q' = -\frac{1}{4}.$$

Comme $q, q' \in \mathbb{Z}$, cette équation n'a pas de solution.
Donc cet élève s'est trompé.

Exercice 4.2. Si $n \in \mathbb{Z}$ n'est pas divisible par 3 (resp. 2), montrer que 3 (resp. 8) divise $(n^2 - 1)$.

$$3 \nmid n \Leftrightarrow n = 3k+1 \text{ ou } n = 3k+2, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$(3k+1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 = 3(3k^2 + 2k) \quad \text{ok.}$$

$$(3k+2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 4 - 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) \quad \text{ok.}$$

