CTD 12 : Maths discrètes.

Exercice 4.3. Quel est le reste de la division euclidienne de $\sum_{k=1}^{2024} k!$ par 15 ?

$R \in [\![0;14]\!]$ car on a $n := \sum_{k=1}^{2024} k! = 15q + R$, $R < 15$, $q \in \mathbb{Z}$.

$n = 15q + R$.

$1! + 2! + \dots + 15! + \dots + 2024! = 15q + R$.

$15 = 3 \times 5 \Rightarrow 15 \mid k!$, $k \geqslant 5$.

$\Rightarrow 5! + 6! + \dots + 2024! = 15q + R - (1! + 2! + 3! + 4!)$

$\Rightarrow R - (1! + 2! + 3! + 4!) = 0$.

$R = 1 + 2 + 6 + 24 = 33 = 2 \times 15 + 3$

Donc $R = 3$.

PGCD

Définit° : Soient $\{a_i\}$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors l'ensemble

$\mathcal{D} = \{d \text{ diviseur commun des } a_i\} = \{d,\ d \mid a_i\}$

$\mathcal{D}$ est non vide car $1 \in \mathcal{D}$

Si $d \in \mathcal{D}$, alors $d \mid a_i \Rightarrow a_i = k_i \times d$, $k_i \in \mathbb{Z}^*$

$|a_i| = |k_i| d \geqslant d$ car $|k_i| \geqslant 1$.

$\Rightarrow |a_i| \geqslant d$, $\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n$,

$\Rightarrow \forall d \in \mathcal{D}$, $|d| \leqslant \min(|a_i|)$

Donc d est borné et non vide dans $\mathbb{Z}$, donc $\mathcal{D}$ est fini.

le max de $\mathcal{D}$ est le pgcd(a_i), donc $d = \text{pgcd}(a_i)$.

PPCM

Définit° Soient $(a_i)_{i \leqslant n}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Alors l'ensemble :

$$M = \{ m \in \mathbb{N}^* \text{ multiple de } a_i \}$$
$$= \{ m \in \mathbb{N}^*, a_i | m, i \leqslant n \}.$$

M est non vide car $a = a_1 a_2 \cdots a_n \in M$.

Théorème :
Tout ensemble E non vide de $\mathbb{N}$ admet un unique élément minimal.
m_0

Comme $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N}$, D'après ce thm, M admet un unique élément minimal. Celui-ci est appelé PPCM(a_i).

Exercice 4.4. Calculer pgcd$(n, n+1)$ et ppcm$(n, n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(*) il faut trouver $\overset{d \in \mathbb{N}}{d \geqslant 1}$ tel que :

$$\left.\begin{matrix} d | n \\ d | n+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d = nk \text{ et } d = (n+1)k = nk' + k', \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Donc $d | n+1-n \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d \in \{-1; 1\} \Rightarrow d = 1$.

Donc $\text{pgcd}(n, n+1) = 1$.

(**) $m = \text{ppcm}(n, n+1)$

$\Rightarrow n | m$ et $n+1 | m$. $\Rightarrow n = km$ et $n+1 = k'm$.

$\Rightarrow k'm - 1 = km \Rightarrow m(k'-k) = 1$.

$\Rightarrow m = \dfrac{1}{k'-k}$. m doit être entier donc $k' - k = 1$

$\boxed{\text{Donc } m = 1.}$ (m'a pas l'air fou ...).

Définit° : Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

On dit que a et b sont premiers entre eux si $pgcd(a,b) = 1$.

Lemme de Gausse.

Si $d \mid ab$ et $pgcd(d,a) = 1$ alors $d \mid b$.

Déf.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

On dit que p est premier si les divisers de p sont $\{\pm 1 ; \pm p\}$

L'ensemble des nombres premiers est noté $\mathcal{P}$

Θm de factorisat°.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique écriture :

$n = \sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ où $k \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathcal{P}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.