

CTD14 : MD.

Exercice 4.7. Trouver les solutions entières de l'équation $102x - 18018y = 18$.
Combien y a-t-il de solutions telles que x et y soient compris entre 0 et 4000 ?

$$\begin{array}{r|l} 18018 & 102 \\ 781 & 176 \\ - 714 & \\ \hline 0678 & \\ - 612 & \\ \hline 066 & \end{array}$$

$$18018 = 102 \times 176 + 66$$

$$102 = 66 \times 1 + 36$$

$$66 = 36 \times 1 + 30$$

$$36 = 30 \times 1 + 6 \rightarrow \text{pgcd}(18018, 102).$$

$$30 = 6 \times 5 + 0.$$

$$-18018x_0 + 102y_0 = \text{pgcd}(18018; 102).$$

$$6 = 36 - 30 \times 1$$

$$6 = 36 - (66 - 36 \times 1) \times 1$$

$$6 = 2 \times 36 - 66.$$

$$6 = 2 \times (102 - 66 \times 1) - 66.$$

$$6 = 2 \times 102 - 3 \times 66.$$

$$6 = 2 \times 102 - 3 \times (18018 - 102 \times 176)$$

$$-3 \times 18018 + 530 \times 102 = 6.$$

$$(x_0; y_0) = (3; 530)$$

Rappel : soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$, et $a, b \neq 0$.

On considère l'équation diophantienne :

$$(E) : ax + by = c. \text{ pour } (x, y) \in \mathbb{Z}^2$$

Alors, (E) admet une solut^o $\Leftrightarrow \text{pgcd}(a,b) \mid c$.

Si $d = \text{pgcd}(a,b) \mid c$ et si

$ax_0 + by_0 = d$ est une relat^o de Bézout pour (a,b) , alors, l'ensemble des solut^o de (E) est:

$$S := \{(x,y), x - c'x_0 = kb', y - c'y_0 = -ka'\}$$

$$\text{où } a' = \frac{a}{d}, b' = \frac{b}{d}, c' = \frac{c}{d}.$$

$$x_0 = 530, y_0 = 3, d = 6, a = 102, b = -1809, c = 18.$$

$$a' = \frac{102}{6}, b' = -\frac{1809}{6}, c' = \frac{18}{6} = 3$$

$$a' = 17, b' = -3003, c' = 3.$$

$$x - 3 \times 530 = -3003k \Rightarrow x = -3003k + 3 \times 530$$

$$y - 3 \times 3 = -17k \Rightarrow y = -17k + 3 \times 3, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow x = -3003 + 1590$$

$$y = -17k + 9$$

$$0 < -17k + 9 < 4000 \text{ et}$$

$$0 < -3003k + 1590 < 4000.$$

$$\frac{9}{17} > k > -\frac{3992}{17}, \text{ et}$$

$$\begin{array}{r|l} 3992 & 17 \\ 59 & 234, \\ 82 & \\ 7 & \end{array}$$

$$\frac{1590}{3003} > k > -\frac{2410}{3003}.$$

$$1 > \frac{9}{17} > k > -17 > -\frac{3992}{17}.$$

$$\text{et } \frac{1590}{3003} > 0 > k > 1 > -\frac{2410}{3003}.$$

$$k = 0.$$

$$\Rightarrow 0 \leq k < 1. \text{ 1 solut}^o \text{ tq } 0 < x < 4000 \text{ et } 0 < y < 4000$$

Exercice 4.8. Montrer que tout entier n peut s'écrire sous la forme $n = 5a + 19b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$(E): 5a + 19b = n.$$

$$19 = 5 \times 3 + 4$$

$$5 = 4 \times 1 + 1$$

$$4 = 4 \times 1 + 0.$$

$$\text{pgcd}(19, 5) = 1.$$

$$5a_0 + 19b_0 = 1.$$

$$1 = 5 - 4 \times 1$$

$$1 = 5 - (19 - 5 \times 3) \times 1$$

$$1 = 5 - 19 + 5 \times 3$$

$$5 \times 4 - 19 = 1.$$

$1|n$, Donc il existe des solut^o à l'éq (E).

Exercice 4.10. Déterminer, en justifiant la réponse, si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

- (1) Si a divise mn , alors a divise m ou n .
- (2) Si a divise n ou a divise m , alors a divise mn .
- (3) Si a divise mn et a ne divise pas m , alors a divise n .
- (4) Si m et n divisent a , alors mn divise a .
- (5) Si a divise $42n + 37$ et $7n + 4$, alors a divise 13.
- (6) La somme des diviseurs positifs de 7^3 est égale à 400.

(1). Faux. Si $9|9$, $9 \nmid 3$.

(2) $a|n \Rightarrow a|kn$. Si on a $k=m$, $a|mn$. Vrai.

(3) $4=2 \times 2$ $4|2 \times 2$, $4 \nmid 2$ mais $4 \nmid 2$. Faux.

(4). $2|2$ et $2|2$ mais $2 \times 2 \nmid 4$. Faux.

$$a|42n+37 \text{ et } a|7n+4 \Rightarrow a|13.$$

$$a|7n+4 \Rightarrow a|6(7n+4)$$

$$\left. \begin{array}{l} a|42n+24 \\ a|42n+37 \end{array} \right\} a|42n+37 - 42n-24 \Rightarrow a|13.$$

$$6. 7^3 + 7^2 + 7^1 + 7^0 = 400. \text{ Vrai.}$$

