

Congruence:

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$, Soit $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$, $q, r \in \mathbb{Z}$

On écrit $r = a \bmod b$ et on dit que "r égale a modulo b"

Soit $a' \in \mathbb{Z}$. On écrit $a' \equiv a [b]$ si $b | a' - a$.

* Propriétés

Si $a_1 \equiv a_2 [b]$
et $a_1' \equiv a_2' [b]$

alors $a_1 \pm a_1' \equiv a_2 \pm a_2' [b]$.
et $a_1 a_1' \equiv a_2 a_2' [b]$.

* Preuve

par hypothèse, $b | a_2 - a_1$ et $b | a_2' - a_1'$

$$\begin{aligned} \exists k, k' \in \mathbb{Z} : a_2 - a_1 &= kb \text{ et } a_2' - a_1' = k'b \Rightarrow (a_2 - a_1) + (a_2' - a_1') = b(k' + k). \\ &\Rightarrow b | (a_2 + a_2') - (a_1 + a_1') \\ &\Rightarrow a_1 + a_1' \equiv a_2 + a_2' [b]. \end{aligned}$$

écrivons ensuite:

$$\begin{aligned} a_2 a_2' - a_1 a_1' &= a_2 (a_2' - a_1') + a_1' (a_2 - a_1) = a_2 k' b + a_1' k b \\ &= b(a_2 k' + a_1' k) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b | a_2 a_2' - a_1 a_1'$$

$$\Rightarrow a_1 a_1' \equiv a_2 a_2' [b]$$

$$a \equiv 0 [b] \Rightarrow b | a - 0 \Rightarrow b | a$$

Exercices.

Exercice 4.11. Montrer qu'un entier n est divisible par :

- (1) 3 (resp. 9) si et seulement si la somme des chiffres de n est divisible par 3 (resp. 9).
- (2) 5 si et seulement si le chiffre des unités de n est 0 ou 5.
- (3) 11 si et seulement si le nombre obtenu en faisant alternativement l'addition et la soustraction des chiffres de n est divisible par 11.

On appliquera ces trois différentes règles à l'entier $N = 29461905$. Cet entier N est-il divisible par 495 ?

$$n = \sum_{i=0}^m a_i 10^i$$

(1) $\text{Mq } n \equiv \sum_{i=0}^m a_i [3].$

$$n = \sum_{i=0}^m a_i 10^i = \sum_{i=0}^m a_i (10^i - 1) + \sum_{i=0}^m a_i$$

Rappel : $a^k - b^k = (a - b) \left(\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i} \right) \Rightarrow a - b \mid a^k - b^k$

$$\sum_{i=0}^m a_i (10^i - 1) + \sum_{i=0}^m a_i$$

$$10 - 1 \mid 10^i - 1^i \Rightarrow 9 \mid 10^i - 1^i.$$

On déduit que $10^i - 1 \equiv 0 [3]$.

$$\Rightarrow n - \sum_{i=0}^m a_i = \sum_{i=0}^m a_i \underbrace{(10^i - 1)}_{\equiv 0 [3]}$$

$$\Rightarrow n - \sum_{i=0}^m a_i \equiv 0 [3] \Rightarrow n \equiv \sum_{i=0}^m a_i [3].$$

(1b) $\text{Mq} : n \equiv \sum_{i=0}^m a_i [9].$

On sait que $n - \sum_{i=0}^m a_i = \sum_{i=0}^m a_i \underbrace{(10^i - 1)}_{\equiv 0 [9]}.$

$$\text{Donc } n - \sum_{i=0}^m a_i \equiv 0 [9] \Rightarrow n \equiv \sum_{i=0}^m a_i [9]$$

$$5|n \Leftrightarrow n \equiv a_0[5] \Rightarrow 5|n-a_0.$$

$$\text{On a } n-a_0 = \sum_{i=0}^m a_i 10^i - a_0 = \sum_{i=1}^m a_i 10^i = \sum_{i=1}^m 2^i 5^i a_i \text{ car } 10^i = (2 \times 5)^i = 2^i 5^i.$$

$$\text{Donc } n-a_0 \equiv 0[5] \Rightarrow n \equiv a_0[5]. = \sum_{i=1}^m 5 \times 2^i 5^{i-1} a_i$$

$$= 5 \underbrace{\sum_{i=1}^m 2^i 5^{i-1} a_i}_{\equiv 0[5]}$$

(3) 11 si et seulement si le nombre obtenu en faisant alternativement l'addition et la soustraction des chiffres de n est divisible par 11.

$$n \equiv \sum_{i=0}^m (-1)^i a_i [11].$$

$$n - \sum_{i=0}^m (-1)^i a_i 10^i = \sum_{i=0}^m a_i 10^i - \sum_{i=0}^m (-1)^i a_i 10^i$$

$$10 - (-1) = 11 \Rightarrow 10 \equiv -1[11]$$

$$\Rightarrow 10^i \equiv (-1)^i[11]$$

$$n = \sum_{i=0}^m a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^m a_i (-1)^i [11] \text{ fini.}$$

On appliquera ces trois différentes règles à l'entier $N = 29461905$. Cet entier N est-il divisible par 495 ?

$$3 \times 5 \times 11 = 495.$$

$$2+9+4+6+1+9+5 = 36 = 9 \times 4. \text{ Divisible par } 9.$$

$$N \equiv 0[5] \text{ car } \dots \text{ Divisible par } 5.$$

$$5-0+9-1+6-4+9-2 = 22 \equiv 0[11] \text{ Donc divisible par } 11.$$

$$\text{Donc } 5 \times 9 \times 11 | n.$$

