

CTD16: MD.

Exercice 4.12. Calculer 174277^k modulo 11 pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que 11 divise le nombre $174277^{2625} - 1$.

En utilisant le critère de divisibilité par 11, on a que.

$$n \equiv \sum_{i=0}^m (-1)^i a_i \pmod{11}.$$

pour $n = 174277$, on a: $174277 \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow 174277^k \equiv 4^k \pmod{11}$.

Établissons le tableau $4^k \pmod{11}$.

k	$4^k \pmod{11}$
0	$4^0 = 1$
1	$4^1 = 4$
2	$4^2 = 16 \equiv 5$
3	$4^3 = 4^2 \times 4 \equiv 5 \times 4 \equiv 20 \equiv 9$
4	$4^4 = 4^3 \times 4 \equiv 9 \times 4 \equiv 36 \equiv 3$
5	$4^5 = 4^4 \times 4 \equiv 3 \times 4 \equiv 12 \equiv 1$

Donc :

$$174277^k \equiv 4^k \pmod{11} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } k \bmod 5 = 0 \\ 4 & \text{si } k \bmod 5 = 1 \\ 5 & \text{si } k \bmod 5 = 2 \\ 9 & \text{si } k \bmod 5 = 3 \\ 3 & \text{si } k \bmod 5 = 4 \end{cases}$$

$$2625 \equiv 0 \pmod{5}, \text{ Donc : } 174277^{2625} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 174277^{2625} - 1 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 11 \mid 174277^{2625} - 1.$$

Équation de congruence: $ax \equiv c \pmod{b}$

On considère l'équation $ax \equiv c \pmod{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $c \in \mathbb{Z}$

$$(E1) \ b \mid ax - c \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Z} \text{ tq } ax - c = -by \Leftrightarrow ax + by = c \quad (E2)$$

$$(E2) \text{ a une solut}^\circ \Leftrightarrow \text{pgcd}(a, b) \mid c.$$

et dans ce cas,

$$\text{Solut}^\circ(E2) = \left\{ (x = \frac{c}{d}x_0 + b'k, y = \frac{c}{d}y_0 - ak), k \in \mathbb{Z} \right\}$$

avec $d = \text{pgcd}(a, b)$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$, $ax_0 + by_0 = d$.

$$\text{Si } (E1) \text{ a une solut}^\circ, \text{ on a } x = c'x_0 + b'k \Leftrightarrow b' \mid x - c'x_0 \Leftrightarrow x \equiv c'x_0 \pmod{b'}$$

Exercice 4.15. Résoudre les équations de congruence suivantes :

(1) $20x \equiv 3 \pmod{10}$

(2) $123x \equiv 7 \pmod{5}$

(3) $107x \equiv 112 \pmod{11}$

(4) $4x \equiv 8 \pmod{16}$

(1) a une solutⁿ $\Leftrightarrow \text{pgcd}(10, 20) \mid 3 \Rightarrow 10 \mid 3$ est faux donc il n'y a pas de solⁿ.

(2) a une solutⁿ $\Leftrightarrow \text{pgcd}(5, 123) \mid 7 \Rightarrow 1 \mid 7$, ok.

$$\begin{array}{l|l} 123 = 5 \times 24 + 3 \\ 5 = 3 \times 1 + 2 \\ 3 = 2 \times 1 + 1 \\ 2 = 2 \times 1 + 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 = 3 - 2 \times 1 \\ = 3 - (5 - 3 \times 1) \times 1 = 2 \times 3 - 5 \times 1 \\ = (5 - 3 \times 1) \times 3 - 5 \times 1 = 5 \times 2 - 3 \times 3 \\ = 5 \times 3 - 3 \times (123 - 5 \times 24) = 123 \times 2 - 49 \times 5 \end{array}$$

$$123x_0 + 5y_0 = \text{pgcd}(123, 5).$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{1} \times 2 \left[\frac{5}{1} \right] \Rightarrow x = 14 \left[5 \right] \Rightarrow x \equiv 4 \left[5 \right].$$

$$x = 5K + 4, K \in \mathbb{Z}.$$

(3) a une solⁿ $\Leftrightarrow \text{pgcd}(11, 107) \mid 112 \Rightarrow 1 \mid 112$ vrai. Donc il y a une solutⁿ.

$$107 = 11 \times 9 + 8$$

$$11 = 8 \times 1 + 3$$

$$8 = 3 \times 2 + 2$$

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

