

CTD2: Maths discrètes.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad u_n \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

Mq $P(n): u_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisat°.

$$u_0 = 0 \leq 4. \text{ OK.}$$

On suppose $P(n)$ vraie, on montre $P(n+1)$.

$$\text{HR: } u_n \leq 4.$$

$$\begin{aligned} 3u_n &\leq 12 \\ \Rightarrow 3u_n + 4 &\leq 16 \\ \Rightarrow \sqrt{3u_n + 4} &\leq 4. \text{ par croissance de } x \mapsto \sqrt{x}. \\ \Rightarrow u_{n+1} &\leq 4. \quad \text{OK, donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4. \end{aligned}$$

Quantificateurs:

Quantificateur $\forall$

Une assertion P peut dépendre d'un paramètre x . L'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x .

$$x \in \mathbb{N}$$

L'assertion $P(x): "x \geq 2024"$. $P(2024)$ est vraie mais pas $P(2023)$

$\forall x \in E: P(x)$ est vraie si les assertions $P(x)$ sont vraies pour tout $x \in E$.

• " $\forall n \in \mathbb{N}: n \equiv 0[2]$ " est fausse car $1 \in \mathbb{N}$ mais $1 \not\equiv 0[2]$.

• "Tout étudiant du groupe 11 a un ordinateur"

Quantificateurs $\exists$

L'assertion " $\exists x \in E$ " est vraie lorsqu'on peut trouver au moins un $x \in E$ tq $P(x)$ soit vraie.

- " $\exists n \in \mathbb{N}, n < 0$ " est fausse.
- "Il existe un étudiant du groupe 11 qui n'habite pas à Lille."

La négation des quantificateurs.

La négation de " $\forall x \in E, P(x)$ " est
" $\exists x \in E, \neg P(x)$ "

La négation de : " $\forall n \in \mathbb{N}, n/2$ " est
" $\exists n \in \mathbb{N}, n \nmid 2$ "

La négation de : "Tout étudiant du groupe 11 a un ordinateur" est
"Il existe un étudiant du groupe 11 qui n'a pas d'ordi."

La négation de " $\exists x \in E, P(x)$ " est
" $\forall x \in E, \neg P(x)$ ".

La négation de " $\exists n \in \mathbb{N}, n < 0$ " est
" $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ "

La négation de "Il existe un étudiant du groupe 11 qui n'habite pas à Lille." est
"tout étudiant du groupe 11 habite à Lille."

Exercice 1.7. Démontrer que si vous rangez $n + 1$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Démontrons par l'absurde.

On suppose que l'assertion "tout tiroir contient au plus une chaussette" est vraie.

Comme il y a n tiroirs, et que chaque tiroir contient au plus 1 chaussette, le nombre de paires de chaussette $\leq n$.

Or, il y a $n+1$ chaussettes.

Contradict*, donc c'est vrai.

Exercice 1.8. En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que :

- (1) La somme et le produit d'un nombre rationnel (non nul pour le produit) et d'un nombre irrationnel sont des nombres irrationnels.
- (2) La racine carrée d'un nombre irrationnel positif est un nombre irrationnel.
- (3) Un rectangle a pour aire 170 m^2 . Montrer que sa longueur est supérieure à 13 m .
- (4) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (écrire $\sqrt{2}$ sous forme d'une fraction irréductible p/q puis discuter la parité de p et q).

① Soit $x \in \mathbb{Q}$, $y \notin \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = \frac{p}{q}$, $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
On suppose que la somme $x+y$ et le produit xy sont rationnels.

$$P(x, y): " \forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \notin \mathbb{Q}, x+y \notin \mathbb{Q} "$$

$$\neg P(x, y): " \exists x \in \mathbb{Q}, \exists y \notin \mathbb{Q}, x+y \in \mathbb{Q} "$$

$$y = \underbrace{(x+y)}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{x}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}. \text{ Or } y \notin \mathbb{Q} \text{ donc contradiction.}$$

$$y = \frac{\underbrace{xy}_{\in \mathbb{Q}}}{\underbrace{x}_{\in \mathbb{Q}}} \text{ donc } y \in \mathbb{Q}. \text{ Or } y \notin \mathbb{Q}. \text{ Contradiction!}$$

② $\forall x \in I = \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+, \sqrt{x} \in I$.

On suppose que: $\exists x \in I, \sqrt{x} \in \mathbb{Q}^+$.

$$\sqrt{x} = \frac{p}{q}, (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(p, q) = 1.$$

$$x = \frac{p^2}{q^2}. \text{ Or, } (p^2, q^2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \text{ Donc } x \in \mathbb{Q}. \text{ \textbf{A}}$$

Contradiction! Donc c'est faux.

③ $L \times l = 170, (L, l) \in \mathbb{R}_+^2$

$$\forall l \in \mathbb{R}_+, \forall L \in \mathbb{R}_+, L > 13, L \times l = 170.$$

On montre par l'absurde.

$$\exists l \in \mathbb{R}_+, \exists L \in \mathbb{R}_+ L \leq 13, L \times l = 170.$$

$$L \times l = 170, L \geq l \\ L = \frac{170}{l} \leq 13.$$

Si $L = \frac{170}{p}$ et que $\frac{170}{p} \leq 13$, on a $\frac{p}{170} \geq \frac{1}{13} \Rightarrow p \geq \frac{170}{13}$

Donc $p > L$ ce qui est faux.

$$\begin{array}{r|l} 170 & 13 \\ 40 & 1367 \\ \hline 16 & \\ \hline 100 & \end{array}$$

④. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}, (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(p, q) = 1$

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2 \text{ donc } p^2 \text{ pair donc } p \text{ pair, } p = 2k$$

$$2q^2 = 4k^2 \text{ donc } q^2 \text{ pair donc } q \text{ pair}$$

Contradiction.