

CTD 3: Maths discrètes

Exercice 2.1. Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

- (1) Le carré de tout réel est positif.
- (2) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
- (3) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
- (4) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
- (5) Il existe un entier multiple de tous les autres.
- (6) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
- (7) Etant donnés trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

$$(1) \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$$

$$(2) \exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$$

$$(3) \forall n \in \mathbb{N}, \exists n_+ \in \mathbb{N}, n < n_+.$$

$$(4) \exists x \in \mathbb{R}, \forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, x \neq \frac{p}{q}.$$

$$(5) \exists a \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \quad n = ka. \quad \text{Vrai car } 0 \in \mathbb{N}$$

$$(6) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, x < q < y.$$

$$(7) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (xy > 0) \vee (xz > 0) \vee (yz > 0).$$

* Digression sur la logique

Soient P, Q deux assertions. On construit de nouvelles assertions en se servant des opérateurs logiques.

• Opérateur $\wedge$

$$P \wedge Q \equiv \begin{cases} V & \text{si } P: V \text{ et } Q: V \\ F & \text{sinon.} \end{cases}$$

$P \backslash Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

• Opérateur $\vee$

$$P \vee Q \equiv \begin{cases} V & \text{si } P: V \text{ ou } Q: V \\ F & \text{sinon.} \end{cases}$$

$P \backslash Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

• Opérateur $\neg$

$$\neg P \equiv \begin{cases} V & \text{si } P: F \\ F & \text{si } P: V \end{cases}$$

• Opérateur $\Rightarrow$

L'assertion $\neg P \vee Q$ est notée $P \Rightarrow Q$

$P \backslash Q$	V	F
V	V	F
F	V	V

• Opérateur $\Leftrightarrow$

$P \Leftrightarrow Q \equiv \begin{cases} V & \text{si } P \text{ et } Q \text{ sont à la fois vraies ou à la fois fausses} \\ F & \text{sinon.} \end{cases}$

* Def : Un ensemble est une collection d'éléments

Un ensemble particulière est l'ensemble vide, noté $\emptyset$ qui ne contient pas d'éléments.

On note $x \in E$ si x est un élément de E .

$\subset / \cup / \cap / C_E$

* Inclusion

$$E \subset F \Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F)$$

* Egalité

$$E = F \Leftrightarrow E \subset F \wedge F \subset E.$$

* Complémentaire

$$C_E A = \{x \in E, x \notin A\}.$$

* Union

Pour $A, B \subset E$

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \vee x \in B\}$$

Exercice 2.3. Dans chacun des cas suivants déterminer si les ensembles A et B sont égaux.

(1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq |x|\}$

(2) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq |x|\}$

(3) $A = \mathbb{Z}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x \text{ pair}\}$

(4) $A = \{x \in [1, 20] = [1, 20] \cap \mathbb{Z} \mid x \text{ impair, non divisible par } 3\}$
 $B = \{x \in [1, 20] \mid 24 \text{ divise } x^2 - 1\}$

(1) $A \neq B$ car $0 > |0|$ mais $0 \geq 0$ est faux : $\subset$

(2) $A \neq B$ car $0 \leq |0|$ mais $0 > 0$ est faux : $\subset$

(3)

(4) Mq $B \subset A$ soit $x \in B$.

On a $\left. \begin{array}{l} 24 \mid x^2 - 1 \\ 2 \mid 24 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \mid x^2 - 1$

$\Rightarrow x$ impair, car s'il était pair $\Rightarrow x^2 - 1$ serait impair ce qui contredit $2 \mid x^2 - 1$.

On a $\left. \begin{array}{l} 24 \mid x^2 - 1 \\ 3 \mid 24 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \mid x^2 - 1$.

x pas divisible par 3 car sinon $3 \mid x \Rightarrow 3 \mid x^2 \Rightarrow 3 \nmid x^2 - 1$,
 $\Rightarrow x \in A$ donc $B \subset A$

Montrons $A \subset B$

comme x impair, $x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (x^2 - 1) = (x-1)(x+1) = (2n+1-1)(2n+1+1) = 4n(n+1)$

comme $2 \mid n(n+1)$ on a $8 = 4 \times 2 \mid 4n(n+1) \Rightarrow 8 \mid x^2 - 1$

Aussi, $x \not\equiv 0 \pmod{3}$ donc $x = 3n+1$ ou $x = 3n+2$

$x-1 = 3n$ ou $x+1 = 3(n+1)$

$\Rightarrow 3 \mid x-1$ ou $3 \mid x+1$

$\Rightarrow 3 \mid (x-1)(x+1) = x^2 - 1$.