

CTD4: Maths discrètes! (chut).

Exercice 2.6. Soit $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

- (1) Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{B})$?
- (2) Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{B}))$?

$$\mathbb{B} = \{0, 1\} \quad \mathcal{P}(\mathbb{B}) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{0, 1\}\}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{B})) = \{\emptyset \quad 0 \text{ él.}\}$$

$$\{\emptyset\}; \{\{1\}\}; \{\{0\}\}; \{\{0, 1\}\}; \quad 1 \text{ él.}$$

$$2 \text{ él. } \left(\begin{array}{l} \{\{0\}; \{1\}\}; \{\{0\}; \{0\}\}; \{\{0\}; \{0, 1\}\}; \{\{1\}; \{0\}\}; \{\{1\}; \{1, 0\}\}; \\ \{\{0\}; \{0, 1\}\} \end{array} \right)$$

$$3 \text{ él. } \left(\{\{0\}; \{1\}; \{0, 1\}\}; \{\emptyset; \{1\}; \{0, 1\}\}; \{\emptyset; \{0\}; \{0, 1\}\}; \{\emptyset; \{0\}; \{1\}\} \right)$$

$$4 \text{ él. } \left(\{\emptyset; \{1\}; \{0\}; \{0, 1\}\} \right)$$

$$\text{Card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{B}))) = 2^4 = 2^{2^2} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16.$$

$$\Delta \text{ card}(\emptyset) = 0 \text{ mais } \text{card}(\{\emptyset\}) = 1.$$

$$\mathbb{B} = \{a; b; c\}$$

$$\text{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{B}))) = 2^{2^3} = 2^8 = 64.$$

Exercice 2.7. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et soit les parties suivantes de E :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}; \quad B = \{4, 5, 6, 7\}; \quad C = \{1, 3, 5, 7\}; \quad D = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Calculer : $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, $(A \cup C) \cap (B \cup D)$, $(A^c \cap D)^c \cap (B \cup C)^c$.

$$A \cap B = \{4\} \quad C \cap D = \{3, 5\} \quad A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}, \quad B \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{3, 4, 5\}. \quad (A \cup C) \cap (B \cup D) = \{2, 3, 4, 5, 7\}.$$

$$A^c = \{5; 6; 7\} \quad B \cup C = \{1; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

$$A^c \cap D = \{5; 6\} \quad (B \cup C)^c = \{2\}$$

$$(A^c \cap D)^c = \{1; 2; 3; 4; 7\}$$

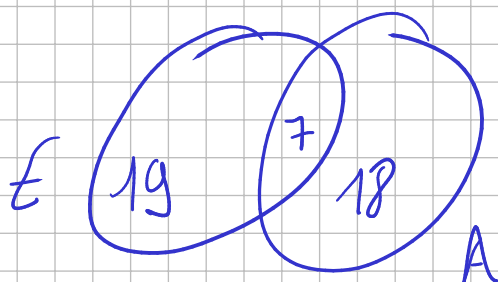
$$(A^c \cap D)^c \cap (B \cup C)^c = \{1; 2; 3; 4; 7\} \cap \{2\} = \{2\}$$

Formule de Moivre.

$$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c \quad X, Y \subset \Omega. \text{ Alors } X^c = \Omega \setminus X.$$

$$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$$

Exercice 2.9. Dans une classe de 30 élèves, tous font au moins une des deux langues : allemand ou espagnol. 18 font allemand et 19 font espagnol. Combien font les deux langues ?



$(19 + 18) - 30 = 7$. 7 font les deux langues.

$$\forall x \in \Omega; x \in A \text{ ou } x \in E$$

$$\text{Or } A \subset \Omega \text{ et } E \subset \Omega$$

$$\text{Donc } A \cup E \subset \Omega \text{ donc } A \cup E = \Omega$$

$$A \cup E = (A \setminus E) \cup (A \cap E) \cup (E \setminus A) \quad \text{union disjointe}$$

$$\text{Or } \text{card}(A) = \text{card}(A \setminus E) + \text{card}(A \cap E)$$

$$\text{card}(E) = \text{card}(E \setminus A) + \text{card}(A \cap E)$$

$$\text{card}(A) + \text{card}(E) = \text{card}(A \setminus E) + \text{card}(E \setminus A) + 2\text{card}(A \cap E) + \text{card}(A \cap E) + \text{card}(A \cap E)$$

$$\Rightarrow \text{card}(A) + \text{card}(E) = \text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 18 + 19 - 30 = 7$$

Produit cartésien

Soient E, F deux ensembles.

$E \times F = \{(x; y), x \in E \text{ et } y \in F\}$. ✓

Exercice 2.11. Soit $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 5\}$ et $C = \{2, 10\}$.

- (1) Expliciter les produits cartésiens : $A \times B$, $B \times A$, $C \times B$, $(A \cap C) \times B$, ainsi que l'ensemble $(A \times B) \cap (C \times B)$.
- (2) Que remarque-t-on ? Peut-on généraliser le résultat ?
- (3) Énoncer un résultat analogue avec le symbole $\cup$ au lieu de $\cap$.

$$A \times B = \{(1; 1); (1; 5); (2; 1); (2; 5); (3; 1); (3; 5)\}.$$

$$B \times A = \{(1; 1); (5; 1); (1; 2); (5; 2); (1; 3); (5; 3)\}.$$

$$C \times B = \{(2; 1); (2; 5); (10; 1); (10; 5)\}.$$

$$(A \cap C) \times B = \{(2; 1); (2; 5)\}.$$

$$(A \times B) \cap (C \times B) = \{(2; 1); (2; 5)\}.$$

2. On remarque que le produit cartésien est distributif sur l'intersection.

$$(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B).$$

$$(x; y) \in (A \times B) \cup (C \times B) \Leftrightarrow (x; y) \in (A \times B) \text{ ou } (x; y) \in (C \times B)$$

Donc $x \in A$ ou $x \in C$ et

$y \in B$ ou $y \in B$.

Donc $x \in (A \cup C)$ ou $y \in B$.

Donc $(x; y) \in (A \cup C) \times B$.

