

CTD6: Maths discrètes

Exercice 2.15. Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + (-1)^n$.

(1) Montrer que n et $f(n)$ sont toujours de parité différente.

(2) Montrer que f est bijective.

(3) Calculer $f(f(n))$. En déduire une expression de f^{-1} et résoudre l'équation :

$$347 = n + (-1)^n$$

dans laquelle n désigne un entier inconnu.

1. Si $n=2k$, $f(2k) = 2k + (-1)^{2k} = 2k + 1^k = 2k+1$
Si $n=2k+1$, $f(2k+1) = 2k+1 + (-1)^{2k+1} = 2k+1 + 1^k \cdot (-1) = 2k$.

2. Si n pair, $f(n) = n+1$, si n impair, $f(n) = n-1$

Soient $f_i(n) = n-1$, $n=2k+1 \forall k \in \mathbb{Z}$.
et $f_p(n) = n+1$, $n=2k \forall k \in \mathbb{Z}$.

$$f_i : I \rightarrow P$$

$$f_p : P \rightarrow I$$

$$P = \{n, n=2k, k \in \mathbb{Z}\} \quad I = \{n, n=2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$$

f_i et f_p sont strictement croissantes, donc :

Pour f_i : $\exists ! n \in I$, $y = n-1$, $y \in P$
Pour f_p : $\exists ! n \in P$, $y = n+1$, $y \in I$.

Comme

$$I \cap P = \emptyset, I \cup P = \mathbb{Z}$$

$$f = \begin{cases} f_i(n) & \text{si } n \in I \\ f_p(n) & \text{si } n \in P. \end{cases}, f \text{ est bijective.}$$

→ bij

Si $f: E \rightarrow F$ et $A, B \subset E$ et $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$
 $C, D \subset F$ et $C \cap D = \emptyset$ et $C \cup D = F$, alors

f bij $\Leftrightarrow g: A \rightarrow C$ bij et $h: B \rightarrow D$ bij

3. $f(f(n))$, $f(n)$ et $f(f(n))$ de parité $\neq$. On prend n pair,

$f(f(n)) = f(n+1) = n+1-1 = n$, Pareil pour n impair.

$f^{-1}(n) = f(n)$ car $f^{-1} \circ f = f \circ f = \text{id}_Z$

$347 = n + (-1)^n$. Comme 347 impair, n est pair.

fp s^+ donc il y a une seule solⁿ, $n = 346$.

Exercice 2.16. On considère les deux applications f et g de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ vers lui-même définies par leurs tables des valeurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	6	4	7	8	9	3	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(x)$	1	2	7	4	5	6	3	8	9

(1) Représenter de la même façon les applications : $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ g$.

(2) Montrer que f est bijective. Représenter de la même façon son application réciproque.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g \circ g$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f \circ f$	3	8	5	1	2	7	9	6	4

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g \circ f$	6	4	3	8	9	7	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f \circ g$	6	4	3	8	9	3	7	1	2



