

CTD 6: Maths-discrètes.

Exercice 2.17. Si E est un ensemble, on appelle identité de E , et on note Id_E , l'application de E vers E définie par : $\text{Id}_E(x) = x$ quel que soit x dans E .

(1) L'application Id_E est-elle injective ? surjective ? bijective ?

À présent soit $f : A \rightarrow B$ une application entre deux ensembles non vides A et B .

$$\text{Id}_E : E \rightarrow E \quad \begin{matrix} x \mapsto x \end{matrix} \quad \text{Id}_E x = x \neq y = \text{Id}_E y \rightarrow \text{injective.}$$

Soit $y \in E$. Pour Mg Id_E surjective, il faut et il suffit :
 $\exists x \in E, \text{ tq } \text{Id}_E x = y.$

On prend $x := y$ et on a $\text{Id}_E(x) = x$.

Donc surjective $\Rightarrow$ bijective.

Chapitre 3 : Combinatoire.

Le principe des tirages successifs.

Quand on fait n choix successifs, s'il y a p_1 possibilités pour le premier choix, $p_2 - 2e$, $p_3 - 3$

Alors il y a $p_1 p_2 \dots p_n$ façons différentes d'entraîner l'un après l'autre ces n choix.

Soit A_i un ensemble de cardinal p_i , $1 \leq i \leq n$. Alors l'ensemble

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}$ a pour cardinal

$$\prod_{i=1}^n \text{card}(A_i) = \prod_{i=1}^n p_i = p_1 p_2 \dots p_n.$$

Exercice 3.1. Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

$$E = \{e_1; e_2; e_3\}; P = \{p_1; p_2\}; D = \{d_1; d_2; d_3; d_4\}$$

$$\text{card}(E \times P \times D) = 3 \times 2 \times 4 = 24.$$

Il y a donc 24 menus possibles.

Exercice 3.2. Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

$$Q_i = \{a_i; b_i; c_i; d_i\} \quad 1 \leq i \leq n, \quad n=15$$

Soit Q_i l'ensemble des réponses de la question i . La réponse de ce questionnaire est le produit cartésien $Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_{15}$. Le nombre de réponses est donc le cardinal de cet ensemble.

$$\begin{aligned} \text{card}(Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \dots \times Q_{15}) &= \text{card}(Q_1) \times \text{card}(Q_2) \times \dots \times \text{card}(Q_{15}) \\ &= \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times \dots \times 4}_{15 \text{ fois}} = 4^{15}. \end{aligned}$$

Exercice 3.3. En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

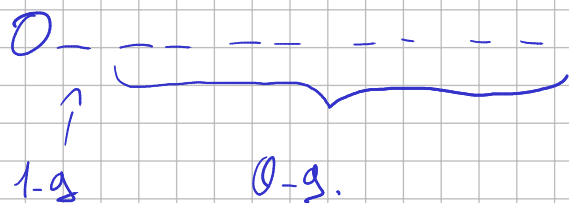
L'ensemble $B = \{0; 1\}$ a pour cardinal 2.

On imagine l'ensemble $C = B^8$ l'ensemble des caractères codables sur 8 bits.

Le nombre de caractères codables sur 8 bits est donc $\text{card}(C) = \text{card}(B^8) = \underbrace{\text{card}(B) \times \text{card}(B) \times \dots \times \text{card}(B)}_{8 \text{ fois}} = 2^8 = 256.$

Exercice 3.4. (1) Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?

(2) Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?



Un numéro de téléphone est un numéro composé d'un 0, puis d'un chiffre entre 1 et 9, puis de 7 chiffres entre 0 et 9.

On a donc 9 choix pour le premier et 8 fois 10 choix ensuite.

Il y a donc $9 \times 10^7 = 900$ millions de numéros disponibles.

Cars.

Soit E un ensemble non vide.

Une biject[°] $f: E \rightarrow E$ est appelée une permutation de E .

Soit $\text{card}(E) = n$.

On compte le nombre de permutat[°] de E .

On peut supposer que $E = \{1; 2; \dots; n\}$.

Comme f est bij, $f(1), f(n)$ sont deux à deux distinctes.

On a n possibilités pour le choix de $f(1) \in \{1; 2; \dots; n\}$.

$\underbrace{\quad}_{n-1} \quad \underbrace{\quad}_{f(2)}$

D'après le principe des choix successifs, il y a $n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!$ biject[°].

Exercice 3.5. Les 30 étudiants du groupe G25 doivent passer au tableau chacun leur tour. Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste de passage ?

1er choix: 30

2e — : 29

⋮

30e — : 1

$\Rightarrow$ nombre de passages : $30 \times 29 \times 28 \dots \times 1 = 30!$