

Exercice 3.5. Les 30 étudiants du groupe G25 doivent passer au tableau chacun leur tour. Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste de passage?

L'ensemble des 30 étudiants s'identifie à l'ensemble $E = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$

→ il faut compter le nombre de permutat° de E
D'après le cours, c'est $n!$

Cours: Arrangements.

Soit E un ensemble de n éléments. Toute partie de E formée de p éléments numérotés de 1 à p s'appelle un arrangement de p éléments de A .

Remarques.

- * 2 arrangements sont différents si ils ne sont pas formés de n él, ou s'ils ont les mêmes éléments, mais pas numérotés de la même façon.
- * Choisir un arrangement de p éléments de E , c'est construire une bij $f: \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow E$.

+ Règle

Le nombre d'arrangements de p éléments pris pour un ensemble de n éléments est:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exercice 3.6. Le dimanche matin un bar PMU prend 5000 paris différents pour le tiercé de l'après-midi. Que peut-on dire du nombre de chevaux engagés dans la course ?

Soit n le nombre de chevaux, et E l'ens. des n chevaux.

Un tiercé s'identifie à l'arrangement $f: \{1;2;3\} \mapsto E$

On a donc :

$$\begin{aligned} A_n^3 &= \frac{n!}{(n-3)!} = 5000 \\ &= \frac{\cancel{(n-3)!} (n-2)(n-1)n}{\cancel{(n-3)!}} = 5000 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (n-2)(n-1)n \leq 5000$$

$$\Rightarrow n \geq 19 \text{ (faire un tableau à la con).}$$

Cours : Combinaisons :

On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble fini E la partie de E qui possède p éléments.

La différence entre une combinaison est que les éléments d'un arrangement sont numérotés, mais pas ceux d'une combinaison.

On note C_p^n le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments :

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Exercice 3.7. Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

$$C_2^8 = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7}{2} = 4 \times 7 = 28.$$

Exercice 3.8. (1) Parmi l'ensemble $\llbracket 1, 100 \rrbracket$, combien sont des carrés de nombres entiers ?

(2) Combien $\llbracket 1, 100 \rrbracket$ a-t-il de parties à 17 éléments contenant exactement trois carrés ?

(3) Combien $\llbracket 1, 100 \rrbracket$ a-t-il de parties contenant trois carrés et trois seulement ?

$$1. A = \{n^2, 1 \leq n^2 \leq 100\} \Rightarrow A = \{n^2, 1 \leq n \leq 10\}$$
$$\Rightarrow \text{card}(A) = 10. \quad \checkmark$$

2. On identifie une partie à 17 éléments contenant exactement 3 carrés à un couple :

$$C = (C_1, C_2)$$

Où C_1 est une partie de 3 éléments de A

C_2 est une partie à 14 éléments de $E \setminus A$

$$\text{Le nombre de } C_1 = C_{10}^3$$

$$\text{Le nombre de } C_2 = C_{90}^{14}$$

$$\text{Le nombre de parties cherchées est : } C_{10}^3 \times C_{90}^{14}. \quad \checkmark$$

3. Pareil que le ②, mais C_2 est une partie de $E \setminus A$

$$\text{card}(E \setminus A) = 90!$$

$$\text{Le nombre de parties cherchées est } 2^{90} C_{10}^3.$$



