

**Exercice 3.11.** On utilise 5 cartes : l'as de trèfle, les rois de carreau et de coeur, les dames de carreau et de coeur.

- (1) Combien y a-t-il de façons de ranger les cartes sur une rangée de 5 places numérotées ?
- (2) Que devient ce nombre si l'on place le roi de carreau à côté de sa dame ?
- (3) Calculer le nombre de façons de ranger les cartes pour qu'aucun roi ne soit à côté de sa dame.

3. Principe d'inclusion-exclusion.  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .

Soit  $A$  l'ensemble des façons de rangement tq le roi de carreau et sa dame seront côte-à-côte.

Soit  $B$  l'ensemble des façons de rangement tq le roi de coeur et sa dame seront côte-à-côte.

D'après Q2,  $|A| = |B| = 48$

$A \cup B$  = ens des rangements tq au moins un roi est à côté de sa dame.

$(A \cup B)^c$  = ens des rangements tq aucun roi n'est à côté de sa dame.

On doit calculer  $|A \cup B|^c$ .

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad |A \cap B| = 24$$

$$= 72$$

$$\text{Donc } |A \cup B|^c = |Q| - |A \cup B| = 120 - 72 = 48.$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

**Exercice 3.12.** Énoncer puis prouver la formule du binôme de Newton.

$$P_n: (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

$$P_0: x+y = \binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1} = y+x \text{ dR.}$$

On suppose  $P_n$  vrai, montrons  $P_{n+1}$ .

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} (x+y)$$

$$= \left( \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{n} x^n y^0 \right) \left( \binom{n}{0} x + \binom{n}{0} y \right)$$

