CM10 : Maths

***Définition** : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que α est une racine de P si $X-\alpha$ divise $P(X)$, càd il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(X) = (X-\alpha)Q(X)$ (le reste est le polynôme nul).

***Théorème** : α est une racine de $P \iff P(\alpha) = 0$.

***Preuve** : Supposons que α est une racine de P et montrons $P(\alpha) = 0$.

Comme α est une racine, il existe un polynôme Q tq
$P(X) = (X-\alpha)Q(X) \Rightarrow P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(X) = 0$.

On suppose que $P(\alpha) = 0$ et montrons que α est une racine de P.
D'après le θrème de la division euclidienne, il existe Q, R deux polynômes Q et R tq $P(X) = (X-\alpha)Q(X) + R(X)$, $\deg R < 1$

Comme $\deg(R) < 1$, R est un polynôme constant.
$R(X) = R_0$

$\Rightarrow P(\alpha) = \cancel{(X-\alpha)Q(X)} + R_0 = 0 \Rightarrow R_0 = 0$.
Donc α est une racine de P.

Soit $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X$, $P \in \mathbb{R}[X]$
$P(0) = 0 \Rightarrow X$ divise $P(X)$
$P(-1) = 0 \Rightarrow X+1$ divise $P(X)$

* Corrolaire : Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des racines distinctes de P. Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq :
$P(X) = (X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_p)Q(X)$.

* Preuve

On fait une récurrence sur p.

$p=1$, C'est la déf de racines.

Supposons que la propriété soit vrai pour un rang p quelconque.
Suppons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}$ $(p+1)$ racines distinctes de P

Par hypothèse de récurrence, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tq :

$$P(X) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)(X-\alpha_4)\dots(X-\alpha_p)\,Q(X)$$

$$P(\alpha_{p+1}) = \underbrace{(\alpha_{p+1}-\alpha_1)(\alpha_{p+1}-\alpha_2)\dots(\alpha_{p+1}-\alpha_p)}_{\neq 0}Q(\alpha_{p+1}) = 0$$

$\Rightarrow Q(\alpha_{p+1}) = 0 \Rightarrow \alpha_{p+1}$ Racine de Q $\neq 0$.
Donc $Q(X) = (X-\alpha_{p+1})Q_1(X)$.

Donc $P(X) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_{p+1})Q_1(X)$.

$P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X$

$P(0) = P(-1) = 0$. Le corrolaire nous dit que :

$X(X+1)$ divise P.

$X(X+1) = X^2 + X$.

$$\begin{array}{l|l} X^4+X^3+X^2+X & X^2+X \\ \hline X^4+X^3 & X^2+1 \\ \quad\quad X^2+X & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$P(X)=(X^2+X)(X^2+1)=X(X+1)(X^2+1)$

$\mathbb{K}$ Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, $P\neq 0$ de degré n, alors P admet au plus n racines.

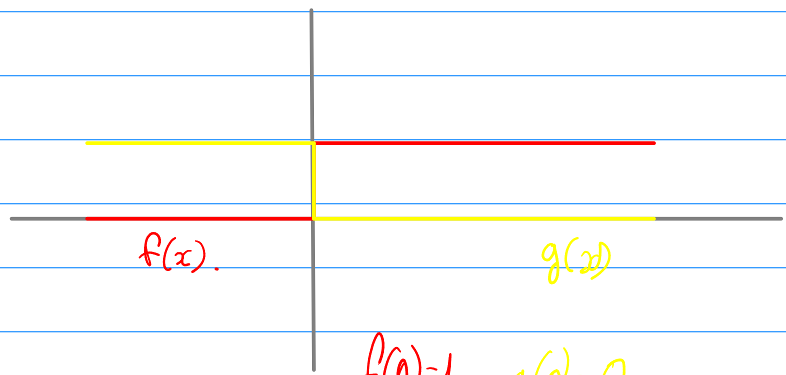
* Preuve : Par l'absurde, supposons que P admet au moins $n+1$ racines distinctes $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1}$

$P(X)=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_{n+1})Q(X)$ avec $Q(X)\in\mathbb{K}[X]$.

$\deg P = n+1+\deg(Q)=n \Rightarrow \deg(Q)=-1$. Absurde.

* Corollaire : Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$.

Si $PQ=0$ alors $P=0$ ou $Q=0$



$f(0)=1$, $g(0)=0$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)g(x)=0$, $\not\Rightarrow$ $f(x)=0$ ou $g(x)=0$.

*Preuve. On suppose $PQ=0$ et $P\neq 0$, montrons $Q=0$.
Si $n=\deg(P)$, P admet au plus n racines. $a_1, \dots, a_n$.

Comme $P(X)Q(X)=0$, Q s'annule sur $\mathbb{K}\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$

Donc Q a une infinité de solut°, donc $Q=0$.

*Définition: Soit α une racine de $P\in\mathbb{K}[X]$.
Le plus grand entier $m\geq 1$ tq $(X-\alpha)^m$ divise P s'appelle la multiplicité de α.

Autrement dit, α est une racine de multiplicité m si $(X-\alpha)^m$ divise P et $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P.

$P(X)=(X-1)^3(X^2+1)$. $(X-1)^3$ divise P
$(X-1)^4$ ne divise pas P.

Sinon: $(X-1)^3(X^2+1)=(X+1)^4Q(X)$
$\Rightarrow (X-1)^3[X^2+1-(X-1)Q(X)]=0$

D'où $X^2+1-(X-1)Q(X)=0$. Absurde car
$1+1-(1-1)Q(1)=2\neq 0$.

Donc 1 est une racine de multiplicité 3.

Lorsque $m=1$, α est une racine simple
Lorsque $m=2$: α est une racine double.
Lorsque $m=3$, α est une racine triple.

*Théorème : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $m \geq 1$, alors α est une racine de multiplicité m si et seulement si :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

(admis)

Factoriser $X^4 - 2X^3 + 2X - 1 = P(X)$

On remarque que 1 est une racine de P.

$P'(X) = 4X^3 - 6X^2 + 2$. $P'(1) = 0$. ok.

$P''(X) = 12X^2 - 12X$ $\quad P''(1) = 0$

$P^{(3)}(X) = 24X - 12$ $\quad P^{(3)}(1) = 12 \neq 0$.

Donc 1 est une racine de multiplicité 3.

Donc $(X-1)^3$ divise P

$X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.

$$P = X^4 - 2X^3 + 2X - 1 = (X^3 - 3X^2 + 3X - 1)(X+1) = (X-1)^3(X+1).$$

Théorème : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ des racines distinctes de multiplicité $m_1, m_2, \dots, m_k$.

Alors il existe $Q(X)$ tq $P(X) = (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_k)^{m_k} Q(X)$.

avec $Q(\alpha_i) \neq 0$, $1 \leq i \leq k$.

* Corollaire : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(P) = n$.

(1). Si $P \neq 0$, P admet au + n racines comptées avec multiplicités.

(2). Si P admet au plus $n+1$ racines comptées avec multiplicité alors $P = 0$.