CM11 : Maths.

* **Déf.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est irréductible si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et le polynôme de la forme aP, où $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

* **Remarque.** Tout polynôme de degré 1 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$

* **Théorème d'Alembert - Gauss**

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\deg(P) \geq 1$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$

⚠ Pas vrai dans $\mathbb{R}[X]$, $P(X) = X^2+1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

La preuve est hors programme.

* **Corollaire 1**

(a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(P) \geq 1$. Alors il existe $a \in \mathbb{C}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P(X) = a(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_k)^{m_k}$$

(b). Les polynomes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Preuve du (a)

D'après le théorème d'Alembert-Gauss, on sait que P admet au moins une racine.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_R$ les racines de P de multiplicité $m_1, m_2, \dots, m_R$.

Donc d'après le θrème (CM10), $\exists Q \in \mathbb{C}[X]$ tq

$P(X) = (X-\alpha_1)^{m_1} \dots (X-\alpha_R)^{m_R} Q(X)$. Si $\deg(Q) \geq 1$, le théorème d'Alembert-Gauss implique qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tq $Q(\alpha) = 0$.

⚠ $Q(\alpha_i) \neq 0$!

En particulier, $\alpha_1 \neq \alpha_i$, $1 \leq i \leq R$.

θ_R, $P(\alpha) = (\alpha-\alpha_1)^{m_1} \dots (\alpha-\alpha_R)^{m_R} \underset{\overset{\|}{0}}{Q(\alpha)} = 0$.

D'où $a \in \{a_1, a_2, \dots, \alpha_R\}$ ce qui est absurde, donc $\deg(Q) < 1$ donc Q est constant.

Preuve du (b)

Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X]$.
Donc P pas constant $\Rightarrow \deg(P) \geq 1$.

Donc, d'après le θ d'Alembert-Gauss, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tq $X-\alpha$ divise P.
Comme les seuls diviseurs de P sont les polynômes constants et les polynôme du type $aX+b$, $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$!

Donc il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tq $X-\alpha = aP$ d'où $P = \frac{1}{a}X - \frac{\alpha}{a}$

Donc $\deg(P)=1$.

Théorèmes ⓐ Les polynomes irreductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle.

ⓑ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\exists a \in \mathbb{R}$ tq $P_1, P_2, \dots, P_k$ irréductibles, $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$, tq $P(X) = a P_1^{m_1}(X) \dots P_k^{m_k}(X)$.

La preuve de ce théorème se déduit du cas $\mathbb{C}[X]$

***Lemme:** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$, $P(\alpha)=0$, alors $P(\bar{\alpha})=0$.

***Preuve**

Écrivons $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

$$\overline{P(\alpha)} = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \dots + \overline{a_n}\,\overline{\alpha}^n = a_0 + a_1 \bar{\alpha} + \dots + a_n \bar{\alpha}^n = P(\bar{\alpha}).$$

***Applicat°:** Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$, $P(X) = X^4 + 1$.

On va passer par la factorisat° complexe. On cherche les racines complexes de P

$P(\alpha) = 0 \iff \alpha^4 + 1 = 0$

$\iff \alpha^4 = -1$

$\iff \alpha^4 = e^{i\pi}$.

On pose $\alpha = Re^{i\theta} \iff \alpha^4 = R^4 e^{4i\theta}$

$$\begin{cases} R^4 = 1 \\ \text{et} \\ 4\theta = \pi. \end{cases} \iff \begin{cases} R = 1 \\ \text{et} \\ \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad 0 \leq k \leq 3. \end{cases}$$

$\alpha_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$X^4+1 = a(X-\alpha_0)(X-\alpha_1)(X-\overline{\alpha_0})(X-\overline{\alpha_1})$.

En identifiant les termes en X^4, on déduit que $a=1$.

$X^4+1 = (X-\alpha_0)(X-\alpha_1)(X-\overline{\alpha_0})(X-\overline{\alpha_1})$. Qui est la facto ds $\mathbb{C}[X]$.

$X^4+1 = (X-\alpha_0)(X-\overline{\alpha_0})(X-\alpha_1)(X-\overline{\alpha_1})$

$$(X^2 - (\alpha_0+\overline{\alpha_0})X + |\alpha_0|^2)$$
$$= (X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_0)X + |\alpha_0|^2)$$

$X^4+1 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$.

Fractions rationnelles.

*Déf. Une fraction rationnelle à coeff dans $\mathbb{K}$ est une expression (fonction) de la forme $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$, $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}^*[X]$

Le degré de F, noté $\deg(F)$, est par définit° :

$$\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q),$$

*Notat° : $\mathbb{K}(X)$ est l'ensemble des fract° rationnelles
$\rightarrow \mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.

Si $F(X) = \frac{P(X)P_1(X)}{Q(X)P_1(X)} = \frac{P(X)}{Q(X)}$.

Une fract° rationnelle $F(X)$ est Réduite si $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$

avec P et Q sans facteurs irréductibles commun.

$F(X) = \dfrac{X^2-1}{X+1}$ n'est pas l'écriture Réduite car

$X^2-1 = (X+1)(X-1)$ Donc

$F(X) = \dfrac{\cancel{(X+1)}(X-1)}{\cancel{X+1}} = X-1$, est la forme réduite.

Dans toute la suite du cours, on supposera que les fract° Rationnelles sont Réduites.

On va apprendre à réécrire une fract° rationnelles comme somme d'éléments simples.

Proposit°: Soit $F = \frac{P}{Q}$, $F \in \mathbb{K}(X)$, alors il existe un unique couple de polynôme $(E, P_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq

$$F(X) = E(X) + \frac{P_1(X)}{Q(X)} \quad \text{avec } \deg(P_1) < \deg(Q).$$

S'appelle la "partie entière" de F.

*** Preuve**: on écrit la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$. Il existe un unique couple de polynôme $(E, P_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq

$$P(X) = E(X)Q(X) + P_1(X). = E(X) + \frac{P_1(X)}{Q(X)}.$$

*** Remarque**: Si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors on peut prendre $E \equiv 0$

Si Q est un polynôme constant, $P_1 \equiv 0$ et $E = \frac{P}{Q}$

$$\begin{array}{r|l} 2X^2+X+1 & X^2+3X+1 \\ -2X^2-6X-2 & \overline{2} \\ \hline 0 \quad -5X-1 & \end{array}$$

D'où $F(X) = 2 - \dfrac{5X+1}{X^2+3X+1}$.

Définit°: Un élément simple dans $\mathbb{K}(X)$ est une fract° rationnelle de la forme :

$$\frac{P(X)}{(Q(X))^m}$$ où $m \geq 1$, Q est un polynôme irréductible, et $\deg(P) < \deg(Q)$.

Autrement dit:

* Dans $\mathbb{C}(X)$ les éléments simples sont les fract° rationnelles de la forme:

$$\frac{a}{(X-\alpha)^m}, \quad a, \alpha \in \mathbb{C}, \ m \in \mathbb{N}^*.$$

* Dans $\mathbb{R}(X)$, les éléments simples sont de la forme:

- $\dfrac{a}{(X-\alpha)^m}$, $a, \alpha \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}^*$.

- $\dfrac{\alpha X+\beta}{(aX^2+bX+c)^m}$ où $a, \alpha, \beta, b, c \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$, et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$