CM 12 : Maths.

$$F(X) = \frac{X^4+X^2+4}{X^3-1} \in \mathbb{R}(X)$$

$$\begin{array}{l|l} X^4+X^2+4 & X^3-1 \\ \hline -(X^4-X) & X \\ = X^2+X+4 & \end{array}$$

$$\Rightarrow F(X) = X(X^3-1) + X^2+X+4$$

$$\Rightarrow F(X) = X + \frac{X^2+X+4}{X^3-1}.$$

Théorème: Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Alors F peut s'écrire comme somme d'éléments simples.

$$F_1(X) = \frac{X+1}{X^2-2X+1}$$

On calcule la partie entière en faisant éventuellement une div. euclidienne.

Comme $\deg(X+1) < \deg(X^2-2X+1)$, $E(X) = 0$.

On factorise le polynôme du bas

$$X^2-2X+1 = (X-1)^2$$

$$\rightarrow F_1(X) = \frac{X+1}{(X-1)^2}$$

Etape 3: on écrit la forme de la décomposit°

$$F_1(X) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

Etape 4 : calcul des coeff dans la décomposit°.

Méthode 1 : on Réduit au $\hat{m}$ dénominateur et on identifie.

$$\frac{X+1}{(X-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} = \frac{a(X-1)+b}{(X-1)^2}$$

$\Rightarrow X+1 = aX+b-a$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b-a = 1 \Rightarrow b = 2. \end{cases}$$

$$\frac{X-1}{(X-1)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}$$

2e méthode :

On multiplie $\frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}$ par $(X-1)^2$

$\Rightarrow X+1 = a(X-1)+b$ On prend $X=1$,

$2 = b$. Que pour le terme de + haut degré.

Pour calculer le 2e terme, on prend une valeur de X, par exemple $X=0$.

$$\frac{1}{(-1)^2} = \frac{a}{-1} + \frac{2}{(-1)^2} \Rightarrow a = 1.$$

$$F_2(X) = \frac{X+1}{(X-1)(X+2)^2} \qquad \deg(X+1) < 3 = \deg(X-1)(X+2)^2$$
$$\Rightarrow E(X) = 0.$$

2e - factoriser le dénominateur.

$(X-1)(X+2)^2$ déjà factorisé

3e - Ecrire la ∀ de la décomposit° en él simples.

$$F_2(X) = \frac{X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}$$

(1) On réduit au m̂ dénominateur : trop pénible !

(2) On multiplie par $(X-1)$.

$$\frac{X+1}{(X-2)^2} = a + \left(\frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}\right)(X-1) \quad X=1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9} = a.$$

On multiplie par $(X-2)^2$

$$\frac{X+1}{X-1} = \frac{a(X+2)^2}{X-1} + b(X+2) + c \Rightarrow \text{Pour } X=-2,\ c = \frac{1}{3}.$$

Pour calculer b, on peut :

Soit évaluer en $X=0$.

Soit on multiplie par X et on fait tendre $X \mapsto +\infty$

$$\underbrace{\frac{X(X+1)}{(X-1)(X+2)^2}}_{\downarrow \, 0} = \frac{aX}{X-1} + \frac{bX}{X+2} + \frac{cX}{(X+2)^2}$$

$\Rightarrow 0 = a + b \Rightarrow b = -a \Rightarrow b = -\frac{2}{9}$

$F_3(X) = \frac{X^4 + X^2 + 4}{X^3 - 1}$ -> division euclidienne.

$$F_3(X) = X + \boxed{\frac{X^2 + X + 4}{X^3 - 1}} \rightarrow F_3^*(X)$$

Factoriser $X^3 - 1$. 1 est une racine évidente.

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 1 & X - 1 \\ \hline & X^2 + X + 1 \\ 0 & \end{array}$$

$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ irréductible.

$$F_3(X) = \frac{X^2 + X + 4}{(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX + c}{X^2 + X + 1}. \quad (*)$$

4e étape : calcul des coeff.

On multiplie $(*)$ par $(X-1)$ et on effectue $X = 1$.

$\frac{6}{3} = a. \Rightarrow a = 2.$

On multiplie par X et on regarde $X \mapsto +\infty$

$$\frac{X(X^2+X+1)}{(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{aX}{X-1} + \frac{X(bX+c)}{X^2+X+1}$$

$\Downarrow$

$1 = a+b \Rightarrow b = 1-a = 1-2 = -1.$

On prend $X=0$

$\Rightarrow c = -4+2 = -2.$

$$F_3(X) = X + \frac{2}{X-1} + \frac{-X-2}{X^2+X+1}$$