# CM13 : Maths.

## Chap 5 : f° réelles.

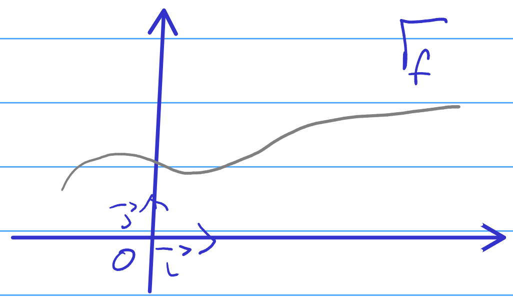
On appelle fonct° réelle tt applicat°

$$f : U \mapsto \mathbb{R}, \quad U \subset \mathbb{R}$$

L'ensemble U s'appelle l'ensemble de déf de f et se note $\mathcal{D}_f$.

Le graphe de f, noté $\Gamma_f$ est défini par :

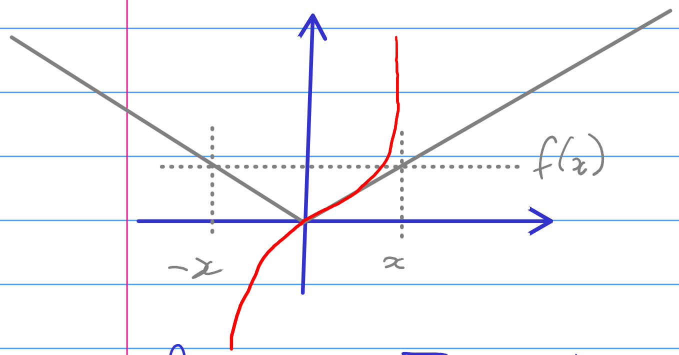
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathcal{D}_f\}.$$




Si $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à l'origine, on dit que

* f est paire si : $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
* " impaire si $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $-f(x) = f(-x)$.

fonct° paire :

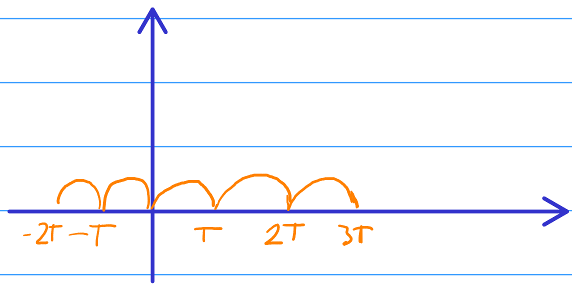



f paire $\Leftrightarrow$ $\Gamma_f$ symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

f impaire $\Leftrightarrow$ $\Gamma_f$ symétrique par rapport à l'origine.

* Si $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, on dit que f est T-périodique ($T \in \mathbb{R}$), si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+T)$$




Donc f T-périodique $\Leftrightarrow$ $\Gamma_f$ est invariant par la translat° de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}T\\0\end{pmatrix}$.

* Soit $f : \mathcal{D}_f \longmapsto \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}_f$.

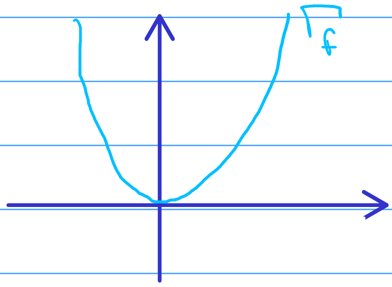
-> f est croissante sur I si $\forall x_1, x_2 \in I$, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

-> f st croissante si $\forall x_1, x_2 \in I$, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

-> f décroissante si $\forall x_1, x_2 \in I$, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

-> f st décroissante si $\forall x_1, x_2 \in I$, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq -(x_2)$.

On dit que $f$ est monotone sur $I$ si $f$ est croissante sur $I$ ou $f$ est décroissante sur $I$.




$s^t$ décroissante sur $\mathbb{R}_-$
$s^t$ croissante sur $\mathbb{R}_+$
⚠ pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Montrons que $f : x \mapsto x^2$ est $s^t$ croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ tq $x_1 > x_2$.

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{>0}\underbrace{(x_1 + x_2)}_{>0} > 0$$

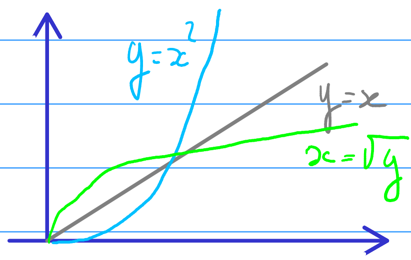
Donc $f(x_1) > f(x_2)$. Donc $f$ $s^t$ croissante sur $\mathbb{R}_+$.

**Proposit°**. Soit $f : I \mapsto J$ une bij de $I$ dans $J$, $I, J \subset \mathbb{R}$.

Alors $\Gamma_f$ et $\Gamma_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

**Preuve** : Soit $(x,y) \in I \times J$, Alors $(x,y) \in \Gamma_f \iff y = f(x)$
$\iff f^{-1}(y) = x \iff (y,x) \in \Gamma_{f^{-1}}$

De plus, l'applicat° $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (y,x) \end{array}$ est la symétrie par rapport à $\Delta : y = x$.



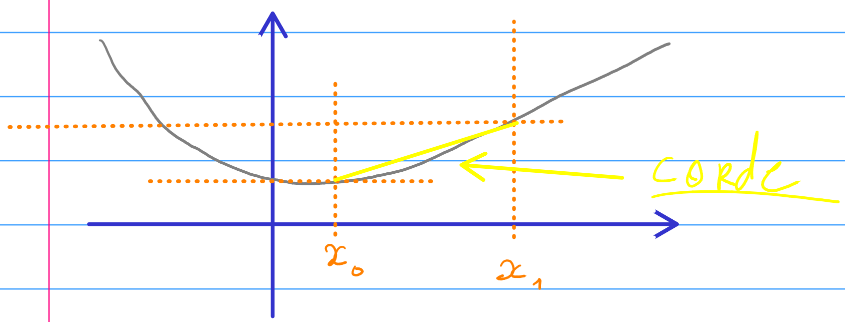
* Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $I \to$ intervalle de $\mathbb{R}$.

concave

$\to f$ est convexe sur $I$ si :

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall \lambda \in [0;1],\ f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \overset{\geq}{\leq} (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

$f$ convexe $\Leftrightarrow \Gamma_f$ est en dessous de ses cordes.




Mq $f$ convexe $\Rightarrow \Gamma_f$ est en dessous de ses cordes.

Soit $\lambda \in [0;1]$, $x_1 < x_2$, notons $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$.

$$f(x) = f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

$$x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

$$f(x) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

$$f(x) \leq f(x_1) + (x - x_1)\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad \Delta : f(x_1) + (x - x_1)\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

$\Delta$ passe par $(x_1, f(x_1))$.

$\Delta$ est de pente $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

$\Delta$ représente la corde correspondant à $x_1, x_2$ donc $\Gamma_f$ est bien en dessous de $\Delta$ donc de sa corde.

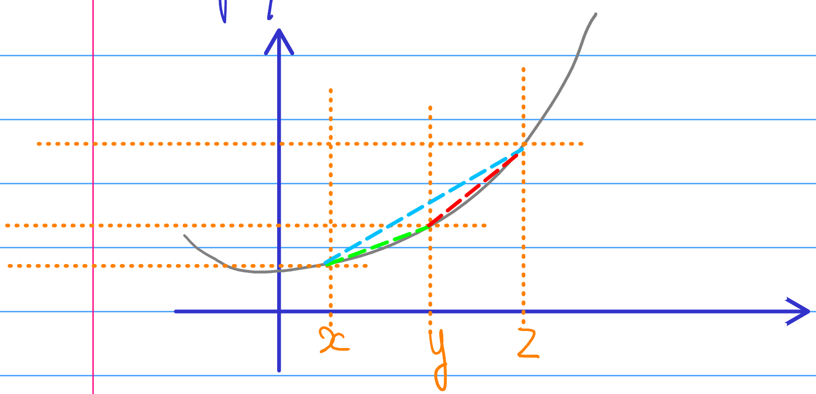
## * Théorème : inégalité des trois pentes.

Soit $f$ convexe sur un intervalle $I$ et $x < y < z$, $x, y, z \in I$.

Alors :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

• Graphiquement :




## * Preuve.

Si $x, y, z \in I$, $x < y < z$

$y = \lambda x + (1-\lambda) z$, $\lambda \in [0;1]$.

$y = \lambda x + \lambda z - z$

$y - z = \lambda(x - z) \iff \lambda = \dfrac{y-z}{x-z}$

$f(y) = f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$ ($f$ convexe).

$f(y) - f(x) \leq (\lambda - 1) f(x) + (1-\lambda) f(z)$

D'où $f(y) - f(x) \leq (1-\lambda)(f(z) - f(x))$.

Or : $1 - \lambda = 1 - \dfrac{y-z}{x-z} = \dfrac{x-z-(y-z)}{x-z} = \dfrac{x-y}{x-z}$.

D'où $f(y) - f(x) = \dfrac{x-y}{x-z}(f(z) - f(x))$.

$$\Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

## * Construct° des fonct° usuelles

On rappelle que si $f : I \mapsto \mathbb{R}$. On dit que $F : I \mapsto \mathbb{R}$ est une primitive de $f$ si $F$ est dérivable sur $I$ et :

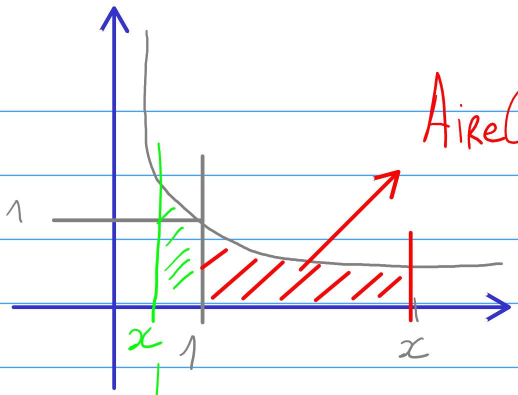
$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Admettons pour le moment que :

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet une unique primitive sur $]0;+\infty[$ et qui s'annule en 1. Cette primitive se note $\ln : ]0;+\infty[ \mapsto \mathbb{R}$
$\qquad x \mapsto \ln(x)$

$\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

$\rightarrow \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$, $x > 0$.




$\text{Aire}(\mathcal{A}) = \ln(x), \quad x > 1.$

$-\text{Aire}(\mathcal{A}) = \ln(x), \quad 0 < x < 1.$