# CM14 : Maths

**Théorème** : la fonct° ln vérifie les propriétés suivantes.

(a). $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1.$

(b.) $x \in ]0;1[ \Rightarrow \ln(x) < 0,\ x > 1 \Rightarrow \ln(x) > 0$

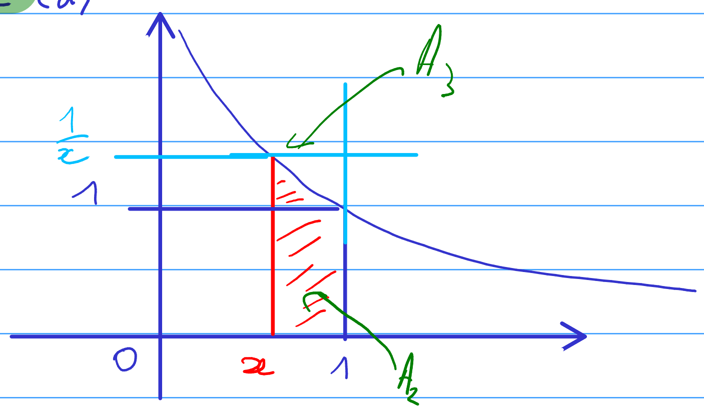
(c). Si $x > 0,\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$

(d) si $x_1, x_2 > 0,\ \ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$

(e) $\forall x > 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \ln(x^k) = k\ln(x).$

(f) ln est $s^t$ ↗ sur $]0;+\infty[$.

**Preuve** (a)




$A_2 \leq A_{Rouge} \leq A_3.$

$1 - x \leq -\ln(x) \leq \frac{1}{x} - 1$, multiplions par $-1$

$\Rightarrow x - 1 \geq \ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}.$

(d) Fixons $x_2 \geqslant 0$.

Considérons $F : ]0;+\infty[ \longmapsto \mathbb{R}$.
$x \longmapsto \ln(x x_2) - \ln(x)$.

* $F$ est bien définie sur $]0;+\infty[$.
* $F$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{\cancel{x_2}}{x\cancel{x_2}} - \frac{1}{x} = 0$.

Donc $F$ est constante.

$F(1) = \ln(x_2) - \ln(1) = F(x)$.
$\ln(x x_2) - \ln(x) = \ln(x_2) \Rightarrow \ln(x x_2) = \ln(x_2) + \ln(x)$

$\ln(x \times \frac{1}{x}) = \ln(1) = 0 = \ln(x) + \ln(\frac{1}{x})$.

$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

(e). Montrer par récurrence $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

$n=0$. $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 \times \ln(x) = 0$ ok.

On suppose $\ln(x^n) = n\ln(x)$ vrai pour $n$ quelconque, montrons pour $n+1$.

$\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x)$

$= n\ln(x) + \ln(x)$ (HR)
$= (n+1)\ln(x)$.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

(f). $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0;+\infty[$.
Donc $\ln$ s^t ↗.

**Théorème**: $\ln : ]0;+\infty[ \mapsto \mathbb{R}$ est une bijectᵒ.
Son applicatᵒ réciproque est la fonctᵒ exponentielle, notée $\exp(x)$.

**Notatᵒ**: $\exp(x) = e^x$

**"Preuve"** $\ln$ s^t ↗ et continue sur $]0;+\infty[$

$\lim_{x \mapsto 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} \ln(x) = +\infty$

D'après le théorème de la bijectᵒ, $\ln$ est une bijectᵒ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

**Corollaire**: $e^x$ vérifie:

(a) $e^0 = 1$
(b) si $x < 0$, $e^x \in ]0;1[$; sinon $e^x > 1$.
(c) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

(d) $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$.
(e). $e^x$ s^t ↗.

**Preuve** (a): $\ln(e^0) = 0 = \ln(1)$. $\Rightarrow e^0 = 1$.

(b) $e^x < 1 \Leftrightarrow \ln(e^x) < \ln(1)$.
$\Leftrightarrow x < 0$.

$\ln(e^{x_1 + x_2}) = x_1 + x_2 = \ln(x_1) + \ln(x_2) = \ln(x_1 x_2)$.

Pour $a>0$ et $x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x\ln(a)}$

$\triangle$ $a^2 = e^{2\ln(a)} = e^{\ln(a)+\ln(a)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(a)} = a \times a$ ok.

# Chapitre 6 : Limites de fonct°.

Programme du DS : chapitre $1 \mapsto 4$.

*** Définition** Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $x_0 \in ]a;b[$

Soit $f : ]a;b[ \setminus \{x_0\} \longmapsto \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

On dit que f admet la limite $\ell$ au point $x_0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > \text{ tq } \underset{x \in ]a;b[}{0 < |x - x_0| < \delta} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Exemple : $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. $\quad \lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

Soit $\varepsilon > 0$, On cherche $\delta > 0$ tq

$|x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

On choisit $\delta < 1$. $|x+2| = |x-2+4| \leq |x-2| + 4 \leq \delta + 4 < 5$.

D'où $|x^2 - 4| = |x-2||x+2| \leq 5|x-2| \leq 5\delta$

Alors, si on met $\delta < \frac{\varepsilon}{5}$ alors :

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| \leqslant 5\delta < \varepsilon.$$

Remarque : si $f$ possède une limite $\ell$ au point $x_0$ alors elle est unique.

*Théorème : caractérisat° séquentielle de la limite.

Soit $f : ]a;b[ \setminus \{x_0\} \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in ]a;b[$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors :

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

(ii) $\Leftrightarrow$ Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset ]a;b[ \setminus \{x_0\}$, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$ alors $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

$$f : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right). \Rightarrow \text{limite en } 0 \text{ ?}$$

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$f(u_n) = \cos(2n\pi) = 1$$
$$f(v_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0$$

Preuve : (ii) $\Rightarrow$ (i).

Supposons que (ii) vérifié.

On suppose alors par l'absurde que (i) faux.

$\left[ (i) \ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \underset{\forall x \in ]a;b[}{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \right]$

$\neg(i) = \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in ]a;b[, |x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - \ell| > \varepsilon$.

$\forall n > 0, \exists u_n \in ]a;b[.$

$|u_n - x_0| < \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{1}{n}}$ et $|f(u_n) - \ell| > 0.$

$\Rightarrow u_n \to x_0 \Rightarrow f(u_n) \to \ell.$

absurde car $|f(u_n) - \ell| > \varepsilon.$