CM 15 : Maths.

*** Théorème** : Soient $f, g :]a;b[\setminus \{x_0\} \mapsto \mathbb{R}$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.
et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell_2$, alors :

(a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \ell_1 + \mu \ell_2$.

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) g(x) = \ell_1 \ell_2$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$. Si $\ell_2 \neq 0$.

*** Preuve du (a)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n \in]a,b[\setminus \{x_0\}$, $u_n \xrightarrow[+\infty]{} x_0$

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell_2$, on a :

$f(u_n) \xrightarrow[+\infty]{} \ell_1$; $g(u_n) \xrightarrow[+\infty]{} \ell_2$

Par les propriétés sur les suites, on a :

$\lambda f(u_n) + \mu g(u_n) \xrightarrow[+\infty]{} \lambda \ell_1 + \mu \ell_2$.

Alors, on peut conclure : $\lim_{x \to +\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \ell_1 + \mu \ell_2$.

$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$

On remarque que $\lim_{x \to x_0} x = x_0$. On déduit que : $\lim_{x \to x_0} x^k = x_0^k$

Par le Θrème précédent, on a :

$$\lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n$$

Donc $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

*** Théorème** : composit° de limites.

Soient $f :]a;b[\setminus \{x_0\} \longmapsto \mathbb{R}$ et $g :]c;d[\setminus \{y_0\} \longmapsto \mathbb{R}$.

telle que $f(]a;b[\setminus \{x_0\}) \subset]c;d[\setminus \{y_0\}$

Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{y \to y_0} g(y) = \ell \in \mathbb{R}$.

alors $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell$

*** Preuve**

- $\lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \left. \begin{array}{l} y \in]c;d[\setminus \{y_0\} \\ |y - y_0| < \delta \end{array} \right| \Rightarrow |g(y) - \ell| < \varepsilon.$$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

$$\exists \delta_1 > 0, \begin{array}{l} |x - x_0| < \delta_1 \\ x \in]a;b[\setminus \{x_0\} \end{array} \Rightarrow |f(x) - y_0| < \delta.$$

D'où, si $\begin{array}{l} |x - x_0| < \delta_1 \\ x \in]a;b[\setminus \{x_0\} \end{array} \Rightarrow |f(x) - y_0| < \delta.$

$$\Rightarrow |g(f(x)) - \ell| < \varepsilon.$$

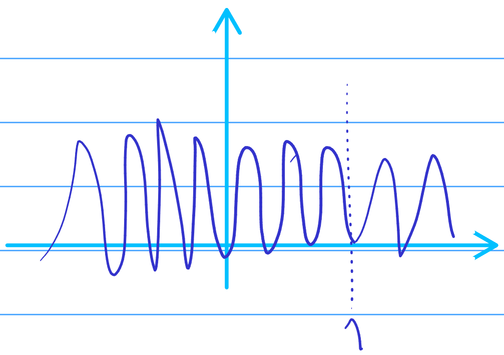
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell.$$

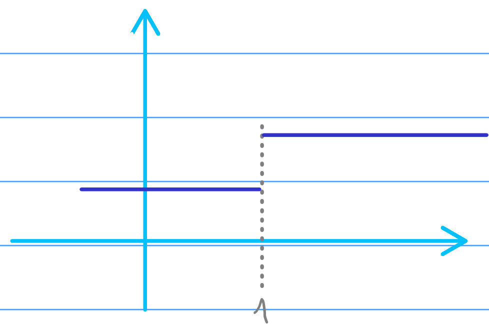
$\lim_{x \to 1} \ln(2x^2+x-1)$.

$\lim_{x \to 1} 2x^2+1-1 = 2+1-1 = 2$.

$\lim_{y \to 2} \ln(y) = 2$. Alors, par composée, $\lim_{x \to 1} \ln(2x^2+x-1) = \ln(2)$

La limite à droite et à gauche en un point.





* Définit° : soit $f :]a; x_0[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

On dit que f admet une limite à gauche $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 (et on écrit $\lim_{x \to x_0^<} f(x) = \ell$

Si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$
$x \in]a; x_0[$.

On dit que f admet une limite à droite $\ell' \in \mathbb{R}$ en x_0 (et on écrit $\lim_{x \to x_0^>} f(x) = \ell'$

Si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon$
$x \in]a; x_0[$.

$\ast$ Remarque : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \ell. \end{cases}$

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$
$x \longmapsto E(x).$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} E(x) = 0, \ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} E(x) = 1.$

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1 \\ 2+\ln(x), & x > 1. \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x^2+1) = 2 . \ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} 2+\ln(x) = 2,$

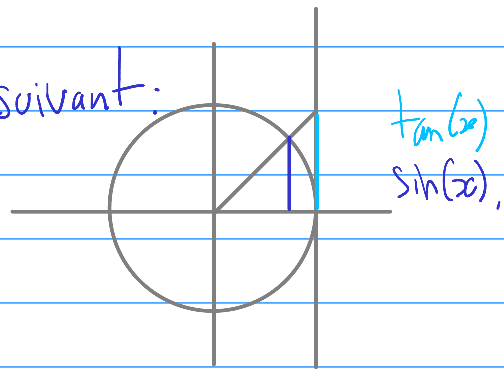
De fait, on a $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2.$

$\ast$ Théorème : (a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, (b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

$\ast$ Preuve (a)

Pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, On a l'encadrement suivant :



$\times \frac{1}{x}$

$0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$ $\quad \times \frac{\cos(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to 1} \cos x = 1 . \ 1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$

TDG et ok.

Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$.

$\cos(-x) \leqslant \frac{\sin(-x)}{-x} \leqslant 1 . \Rightarrow \cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$ ok.

(b) Rappelons que pour $u > 0$, $1 - \frac{1}{u} \leqslant \ln(u) \leqslant u - 1$.

pour $x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x+1} = 1$ et TDG $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Pareil pour $x <$ mais on renverse le sens de l'inégalité.

Alors, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

(c). posons $x = \ln(1+t) \Leftrightarrow e^{x} = 1+t . \Rightarrow t = e^{x} - 1$,

$$\frac{e^{x}-1}{x} = \frac{e^{\ln(1+t)}-1}{\ln(1+t)} = \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

$\lim\limits_{x \to 0} e^{x} - 1 = 0$.

Donc par le Oréme de composit° de limites, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = 1$

*Définition:

Soit $f :]a; +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$,

* On dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ si:

$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si :

$\forall B > 0, \exists A > 0$ tq $x > A \Rightarrow f(x) > B.$

* Définit° : soit $f :]a;b[\setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a;b[$.

f tend vers $+\infty$ en x_0. $\Leftrightarrow$

$$\forall B > 0, \exists \delta > 0, \underset{x \in]a;b[\setminus \{x_0\}}{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow f(x) > B.$$

* Notion d'équivalents

Soit $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f, g deux fonct° définies au voisinage de x_0 et supposons que $g(x) \neq 0$ pour tout x au voisinage de x_0

On dit que f et g sont équivalents au voisinage de x_0 et on écrit $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

$$\sin(x) \underset{x \to x_0}{\sim} x$$

$$P(x) = a_0 + a_1 + \dots + a_n x^n$$

$$P(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n x^n$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 + 2x}{4x^4 + 2x^3 + 1} \sim \frac{2x^3}{4x^4} = \frac{1}{2x} = 0.$$