CM16 :: Maths.

***Notat°** : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b avec $a < b$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Alors on note $\mathring{I} =]a;b[$. (l'intérieur de I)

* Théorème de la limite monotone

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonct° monotone sur I

Si $x_0 \in \mathring{I}$, alors f admet une limite finie à droite et à gauche en x_0.

Si $x_0 = a$, alors f admet une limite à droite en a et si $x_0 = b$, alors " " " " gauche en b

*** Preuve.** Si $x_0 \in \mathring{I}$, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f \nearrow$.

Montrons que f admet une limite à droite et à gauche en x_0 et

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x).$$

Posons $\Omega_- = \{f(x) ; a < x < x_0\} \subset \mathbb{R}$

→ Ω_- est non vide

→ Ω_- est majorée car $a < x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ par croissance de f.

$\Rightarrow \Omega_-$ est majorité par $f(x_0)$.

Donc $\ell = \sup(\Omega_-)$ existe et $\ell \leq f(x_0)$.

Mq : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \ell$

Soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisat° de la borne supérieure avec des ε, on sait qu'il existe $a < x_1 < x_0$ tel que

$$\ell - \varepsilon < f(x_1).$$

Posons $\delta = x_0 - x_1 > 0$.

Pour $x_0 - \delta < x < x_0$, on a :

$$\ell - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq \ell \leq \ell + \varepsilon. \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Donc f admet une limite à gauche et cette limite à gauche est la borne supérieure.

Exo : de m̂, on montre que si $\Omega_+ = \{f(x), x_0 < x < b\}$

Ω est non vide, minorée par x_0 $\Rightarrow L = \inf(\Omega_+)$ existe $f(x_0) \leq L$.
On montre donc que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = L$.

* Théorème : On a :

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$; (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

(c) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; (d) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Mq : $\forall A > 0$, $\exists B > 0$ tel que $x > B \Rightarrow \ln(x) > A$.

Rappel : $\ln(2^n) = n \ln(2)$, $n \in \mathbb{N}$.

Choisissons $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $n_0 \geqslant \frac{A}{\ln(2)}$

Posons $B = 2^{n_0}$.

Soit $x > B$, par croissance de ln, on a :

$$\ln(x) > \ln(B) = n_0 \ln(2) \geqslant \frac{A}{\cancel{\ln(2)}} \cancel{\ln(2)} = A$$

Donc $\ln(x) > A$.

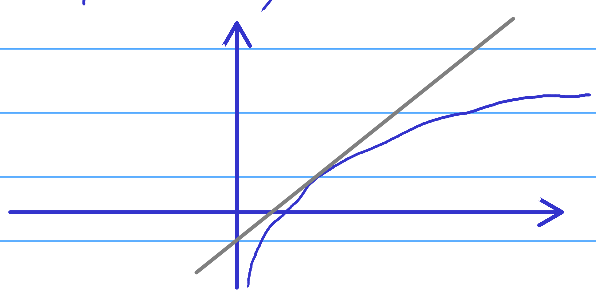
(b) Rappelons que $-\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Si $x \underset{>}{\to} 0$, alors $\frac{1}{x} \to +\infty$

(a) par le théorème de la composit° de limites, on a :

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} (-\ln(x)) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \ln(x) = -\infty.$$

(c). On a vu que $\forall t > 0$, $\ln(t) \leqslant t + 1$.



$x = t-1 \Rightarrow \ln(x+1) \leq x$. par croissance de e^x.
$\Rightarrow x+1 \leq e^x$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, par le théorème de la comparaison sur les limites

d) On remarque que $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$.

D'après ⓔ et le théorème de composit° sur les limites, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Lemme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

preuve : Écrivons $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt$.

pour $x \geq 1$, $1 \leq t \leq x \Rightarrow 0 < 1 \leq \sqrt{t} \leq t$.

D'où $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$. en intégrant, on a

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^x = 2\sqrt{x} - 1.$$

$0 < \ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 1$.

D'où $0 < \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}-1}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$.

$$\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

D'après le θrème des gendarmes, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

* **Théorème (croissances comparées)**. Soit $\alpha, \beta, \gamma > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

Alors ⓐ. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0.$

ⓑ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\gamma x}} = 0,$

ⓒ $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{e^{\gamma x}} = 0.$

Preuve ⓐ.

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha$$

On pose $t = x^{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\ln(t) = \ln(x^{\frac{\beta}{\alpha}}) \frac{\beta}{\alpha}\ln(x)$. et donc $\ln(x) = \frac{\alpha}{\beta}\ln(t)$.

D'où : $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}\ln(t)}{t}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln(t)}{t}\right)^\alpha$

$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{\beta}{\alpha}} = +\infty$. Par le lemme $\frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et par le θrème

de compo de limite, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0.$

Chapitre 7 : fonct° continues.

* **Définit°**. Soit $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a;b[$.

On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite en x_0 qui est égale à $f(x_0)$.

Autrement dit, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Autrement dit, f est continue en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \underset{x \in]a;b[}{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

* f est continue sur $]a;b[$ si f est continue en tout point de $x_0 \in]a;b[$.

Exemple : soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 2\ln(x) + 2, & x \geq 1 \\ e^x - e + 2, & x < 1. \end{cases}$$

Etudier la continuité de x en 1.

On a $f(1) = 2\ln(1) + 2 = 2$.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (2\ln(x) + 2) = 2\ln(1) + 2 = 2.$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (e^x - e + 2) = e - e + 2.$$

f admet une limite à droite et à gauche, elles sont égales donc

$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow$ f est continue en 1.

On sait que exp est continue sur $\mathbb{R}$ et ln continue sur $]0;+\infty[$.

Sur $]1;+\infty[$, f coïncide avec $x \mapsto 2\ln(x)+2$ qui est continue sur $]1;+\infty[$

$\Rightarrow$ f continue sur $]1;+\infty[$