CM 17 : Maths.

On dit que $f : [a;b] \longmapsto \mathbb{R}$ est continue sur $[a;b]$ si :

* f est continue sur $]a;b[$
* f admet une limite à droite de a et à gauche de b.

* Des résultats sur les limites, on peut déduire les deux résultats suivants.

(1) * **Théorème** : soient $f, g : I \longmapsto \mathbb{R}$ continues sur I, alors :

① : $\forall \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \gamma g$ continue sur I.

② . fg continue sur I.

③ . $\frac{f}{g}$ continue sur $\{x \in I, g(x) \neq 0$.

(2) * **Théorème** : Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$, $g : J \longmapsto \mathbb{R}$ continues,

Supposons que $g(J) \subset I$.

Alors $f \circ g$ est continue sur J

Si P est un polynôme, alors P est continue sur $\mathbb{R}$.

(d'après le théorème (1)).

Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q deux polynômes

P, Q continus sur $\mathbb{R}$.

Donc d'après le théorème (1),

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, Q(x) = 0\}$.

$x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\ln(x)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$x \mapsto e^x$ est définie comme la fonct° réciproque de l'applicat° continue $x \mapsto \ln(x)$.
qui est une bijecto° de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$\begin{array}{l} x \mapsto e^x \\ \mathbb{R} \mapsto]0;+\infty[\end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $a > 0$, $\begin{array}{l}]0;+\infty[\mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto x^a = e^{a\ln(x)}. \end{array}$

est contine sur $\mathbb{R}$ car :

$\begin{array}{l}]0;+\infty[\mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto a\ln(x) \end{array}$ | continue sur $]0;+\infty[$

et $\begin{array}{l} x \mapsto e^x \\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \end{array}$ | continue sur $\mathbb{R}$,

Par le théorème (2), $x \mapsto x^a$ est continue sur $]0;+\infty[$.

Exemple d'applicat° : soit $f(x) = e^{x^2+5} + \ln(x^2 + 4x - 1)$

$x \mapsto x^2 + 5$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto e^x$ " " " " " " "

Par composée, $x \mapsto e^{x^2+5}$ " " " " "

Etudions le signe de x^2+4x-1. $\Delta = 20$.

$\Rightarrow x_1 = \frac{-4+\sqrt{20}}{2} = -2+\sqrt{5}$; $x_2 = -2-\sqrt{5}$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
x^2+4x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \mapsto x^2+4x-1$ est continue sur $]-\infty ; x_2[\cup]x_1 ; +\infty[$ et à valeurs strictement positives.

$x \mapsto \ln(x)$ est définie et continue sur $]0 ; +\infty[$.

Donc $x \mapsto \ln(x^2+4x-1)$ est définie et continue sur I.

Donc f est définie et continue sur I.

*** Définit° :**

Soit $f : I \setminus \{x_0\} \mapsto \mathbb{R}$ où $x_0 \in I$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. et supposons f continue sur $I \setminus \{x_0\}$.

On dit que f admet un prolongement par continuité sur I si f admet une limite en x_0 (ou une limite à gauche/droite si x_0 est une extrémité de I).

De plus, si on note $l = \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, et qu'on pose :

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & x \in I \setminus \{x_0\} \\ l, & x = x_0 \end{cases}$$

On obtient que $\tilde{f}$ est continue sur I.

et on appelle $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f.

Exemples :

$$]0;+\infty[\mapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^a, \quad a>0.$$

est continue sur $]0;+\infty[$.

Si $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^a = \lim\limits_{\substack{x \mapsto 0 \\ >}} e^{a\ln(x)}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} a\ln(x) = -\infty$ on a donc :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \text{ et donc } \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{a\ln(x)} = 0.$$

Si on définit $f : [0;+\infty[\mapsto \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0;+\infty[\\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

On obtient que f est continue sur $[0;+\infty[$.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longmapsto \mathbb{R}.$$
$$x \mapsto x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$

$\cos : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$.

par composition et produit, f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$$

$$0 \leq \left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

et si on pose $\tilde{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \tilde{f}(x)$ $\begin{cases} f(x) \text{ si } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0 \text{ si } x=0. \end{cases}$

$f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \mapsto \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 1 \text{ si } x=0. \end{cases}$$

*** Théorème de Heine :**

Soit $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ continue.

Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit, $\exists c_1, c_2 \in [a;b]$

tel que $\forall x\in[a;b]$, $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$.

*** Preuve :** Montrons que f est majorée

$\exists M > 0$ tel que $\forall x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant M$,

(i) Supposons que f n'est pas majorée par l'absurde

$\forall M > 0$, $\exists x \in [a;b]$, $f(x) > M$.

$\forall n \geqslant 0$, $\exists x_n \in [a;b]$ tel que $f(x_n) > n$.

Comme $\forall n \geqslant 0$, $a \leqslant x_n \leqslant b$, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une applicat° $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tel que

$(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ converge vers l.

$a \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant b$ || de plus, $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geqslant n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$a \leqslant l \leqslant b$. || Donc $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Or, $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, f continue en $l \in [a;b] \Rightarrow f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(l)$

Ce qui contredit $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow$ Donc f est majorée.

(ii) Si on applique la première étape à $-f$, on obtient que $-f$ est majorée donc f est minorée.

(iii) f atteint ses bornes.

Soit $E = \{ f(x), x \in [a,b] \} \subset \mathbb{R}$.

E est borné et non vide. Donc E admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Comme $M = \sup(E)$, d'après la caractérisat° séquentielle de la borne supérieure, $\exists x_n \in [a;b]$ tq $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} M$

Par Bolzano-Weierstrass, $\exists x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} c_2 \in [a;b]$.

$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(c_2)$, donc $M = f(c_2)$.

$\forall x \in [a;b]$, $f(x) \leq M = f(c_2)$.

Pareil avec $m = \inf(E)$.

⚠