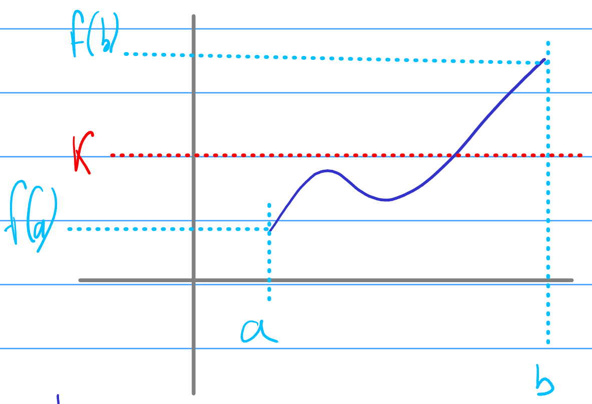
CM18 : Maths.



* Théorème des Valeurs intermédiaires.

Soit $f : [a;b] \longmapsto \mathbb{R}$ continue. Alors $\forall K \in [f(a);f(b)]$,
$\exists c \in [a;b]$ tq $K = f(c)$.

* Preuve

On va construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$,
$a \leq a_n \leq b_n \leq b$ tq : $f(a_n) \leq K \leq f(b_n)$

On suppose $f(a) \leq f(b)$.

Initialisat° :

On pose $a = a_0$ et $b = b_0$ Donc vrai.

Hérédité :

On suppose avoir construit :

$a = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \dots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \dots \leqslant b_0 = b.$

et $\forall \ell \in [\![0;n]\!]$, $f(a_\ell) \leqslant \ell \leqslant f(b_\ell)$.

Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant k$, on pose :

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{n+1} = b_n.$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geqslant 0 \Rightarrow a_{n+1} \geqslant a_n$$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0 \Rightarrow a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$$

et $f(a_{n+1}) = f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant k \leqslant f(b_n) = f(b_{n+1})$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\frac{b-a}{2^n}}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, on pose :

$a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

La suite (a_n) est croissante.

La suite (b_n) est décroissante

et $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, donc :

$\exists c \in [a;b]$ tq $a_n \to c$ et $b_n \to c$.

$f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$. comme f continue :

$f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(c)$ et $f(b_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(c)$

Donc $k = f(c)$.

* Corrolaire : Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue et supposons $f(a)f(b) < 0$

Alors $\exists c \in [a;b]$ tq $f(c) = 0$.

* preuve

$f(a)f(b) < 0 \Rightarrow 0 \in [f(a); f(b)]$. Donc par le TVI, $\exists c \in [a;b]$ tq $f(c) = 0$.

et comme $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, $c \neq a$ et $c \neq b$.

Exemple.

tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair a au moins une racine réelle.

Si $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{2n} X^{2n} + a_{2n+1} X^{2n+1}$, $a_{2n+1} \neq 0$.

On peut supposer $a_{2n+1} > 0$ (quitte à regarder $-P(X)$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = -\infty$$

$\Rightarrow$ (TVI et finito. ($\exists c \in \mathbb{R}$ tq $P(c) = 0$.

Pour approcher la solut° : dichotomie.

*** Corrolaire :**

Soit $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$.

Alors $\exists c_1, c_2 \in [a;b]$ tq $f([a;b]) = [f(c_1); f(c_2)]$.

*** Preuve :** Par le Th de Heine, $\exists c_1; c_2 \in [a;b]$ tq $\forall x \in [a;b]$,

$f(c_1) \leqslant f(x) \leqslant f(c_2)$

$\Rightarrow f([a;b]) \subset [f(c_1); f(c_2)]$.

de +, si $y \in [f(c_1); f(c_2)]$, alors par le TVI, il existe $c \in [a;b]$ tq $y = f(c)$. Donc $[f(c_1); f(c_2)] \subset f([a;b])$

Donc $f([a;b]) = [f(c_1); f(c_2)]$.

*** Théorème de la bijection**

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ continue et st monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors ;

(i) $J := f(I)$ est un intervalle
(ii) f est une bij de I sur J.
(iii) $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J.

* Preuve

On va admettre que si $A \subset \mathbb{R}$, alors A est un intervalle ssi

$\forall (a_1, a_2) \in A^2$, $a_1 < a_2$ alors,

si $a_1 < b < a_2 \Rightarrow b \in A$.

Le (i) découle du TVI, car si $y_1 = f(a) \in J$ et $y_2 = f(b) \in J$,
alors $\forall y$ compris entre y_1 et y_2, $\exists c \in [a, b]$ tq $y = f(c)$
Comme $c \in I$, on a $y = f(c) \in f(I)$
Donc $J = f(I)$ est un intervalle.

(ii). f est surj de I sur $J = f(I)$

f est injective car si $x_1, x_2 \in I$ avec $f(x_1) = f(x_2)$, alors
on a $x_1 = x_2$, sinon c'est absurde.

(iii). Montrons que f^{-1} est continue.

Quitte à changer f en $-f$, supposons f st $\nearrow$

Alors f^{-1} s^t $\nearrow$ sur J car si $y_1 > y_2$, $\exists ! x \in I$

$y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

et on a $x_1 > x_2$ car sinon :

si $x_1 \leq x_2 \to x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$y_1 = y_2$ absurde

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$y_1 < y_2$ absurde

Soit $y_0 = f(x_0) \in J$, $x_0 \in I$, Mq f^{-1} est continue en y_0.

- Soit x_0 n'est pas une extrémité de I.

$\exists \varepsilon > 0$ tq :

$[x_0 - \varepsilon ; x_0 + \varepsilon] \subset I$.

$y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon) \in f(I) \subset J$,

$x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \Rightarrow y_1 < y_0 < y_2$

Soit $\delta := \min\left(\frac{y_2 - y_0}{2} ; \frac{y_0 - y_1}{2}\right) > 0$,

$|y - y_0| < \delta \Leftrightarrow y_0 - \delta < y < y_0 + \delta < y_0 + \frac{y_2 - y_0}{2} = \frac{y_0 + y_2}{2}$.

et $y_0 - \delta > y_0 - \frac{y_0 - y_1}{2} = \frac{y_0 + y_1}{2}$.

Donc $y_1 < y < y_2 \iff f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0+\varepsilon)$

$$\Rightarrow x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x + \varepsilon$$

D'où $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

On définit $\ln :]0;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ l'unique primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ s'annulant en 1. ln est dérivable donc continue sur $]0;+\infty[$. ln est st $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$.

car $\ln'(t) = \frac{1}{t} > 0 \ \forall t > 0$.

Donc ln est une biject° de $]0;+\infty[$ $\mathbb{R}$

car $\lim_{t \to 0^+} \ln(t) = -\infty$ et $\lim_{t \to +\infty} \ln(t) = +\infty$

D'où $\exp = \ln^{-1} : \mathbb{R} \longmapsto]0;+\infty[$. est continue.