

CM19: Maths

Fonct° dérivables.

* definit°: soit $f:]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a; b[$

(a) f est dérivable en x_0 si la fonct°
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie en x_0 .

On note alors $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

(b) f est dérivable sur $]a; b[$ si pour tout $x_0 \in]a; b[$. Lorsque f est dérivable sur $]a; b[$, on appelle :

$f':]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f'(x)$, la dérivée de f .

* Remarque: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ si $x = x_0 + h$.

Si l'une existe, l'autre aussi

* Proposit°:

Soit $f:]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$,

f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \exists \varepsilon:]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}$
 $h \mapsto \varepsilon(h)$

$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ tq $f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\varepsilon(h)$

* Preuve $\Rightarrow$ on suppose f dérivable en x_0 . Alors on peut poser

$$l = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

soit $\delta > 0$ $\exists \delta > 0$ $\exists x_0 - \delta; x_0 + \delta \subset]a; b[$

Si $h \in]-\delta; \delta[\Rightarrow x_0 - \delta \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\subset]a; b[$.

et on pose :

$$\varepsilon :]-\delta; \delta[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$h \mapsto \begin{cases} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - l, & h \neq 0 \\ 0, & h = 0. \end{cases}$$

On a $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ et $\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - l, h \neq 0$.

$$h\varepsilon(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - lh \Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + lh + h\varepsilon(h)$$

$\Leftarrow$ Si $f(x_0+h) = f(x_0) + lh + h\varepsilon(h)$, on a

$$f(x_0+h) - f(x_0) = lh + h\varepsilon(h) \Rightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l + \varepsilon(h)$$
$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} l$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l$$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

Exemples : soit $n \geq 2$, $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $f(x_0+h) = (x_0+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k}$ par la formule du binôme de Newton.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} = x_0^n + n h x_0^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $k=0$ $k=1$

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + n x_0^{n-1} h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} = f(x_0) + n x_0^{n-1} h + h \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k} \\ &= f(x_0) + l h + h \varepsilon(h) \text{ avec } l = n x_0^{n-1} \text{ et } \varepsilon(h) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k} \end{aligned}$$

$$k \geq 2 \Rightarrow k-1 \geq 1 \rightarrow h^{k-1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Donc $f'(x_0)$ existe et $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$

* Proposition : si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

* Preuve : comme f dérivable en x_0 , on a :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h \varepsilon(h) \text{ avec } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Si on pose $x = x_0+h$, on a :

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x-x_0)}_{\substack{\downarrow x \rightarrow x_0 \\ 0}}$$

$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$$

La réciproque est fautive.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |x|$. f est continue sur $\mathbb{R}$ car:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \leq |x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \text{ par inégalité triangulaire.}$$

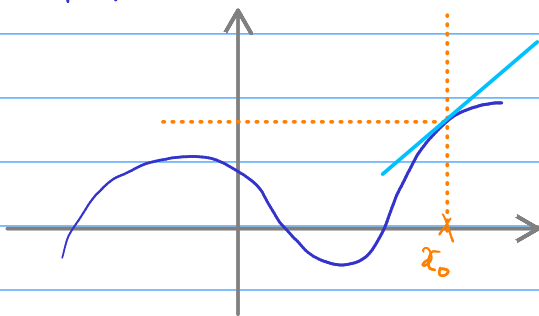
$$\text{Donc } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{si } x > 0 \\ -\frac{x}{x} = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Donc f pas dérivable en 0.

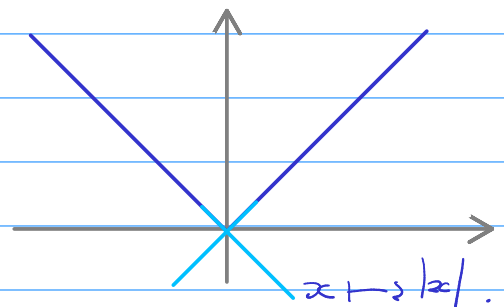
Graphiquement:



f dérivable en x_0 si

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{p(x - x_0)}_{\text{tangente}} + (x - x_0) \varepsilon(h)$$
$$\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

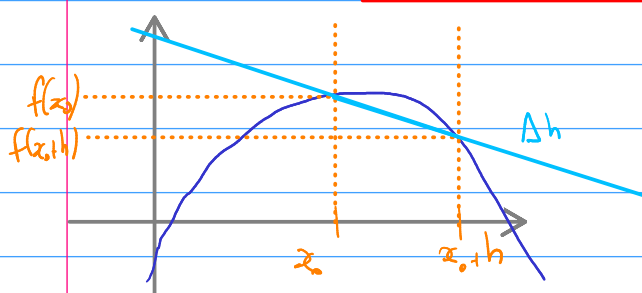
p est une droite (tangente).



il n'est pas possible de trouver
une unique tangente en 0.

* **Tangente en un point** si f est dérivable en $x_0 \in]a, b[$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente Δ au point $(x_0, f(x_0))$ donnée par

$$\Delta: y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



$$\text{pente} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Rappeler formules de dérivées des fonctions usuelles.

* **Théorème:** Soient $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$.

Si f et g sont dérivables en x_0 , Alors :

(a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

(b) $f+g$ d^o en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(c) fg d^o en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(d) $\frac{f}{g}$ d^o en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

* **preuve (d)**

$$\frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{h g(x_0+h)g(x_0)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(f(x_0+h) - f(x_0))g(x_0) + f(x_0)(g(x_0) - g(x_0+h))}{hg(x_0+h)g(x_0)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \\
 &= \frac{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0) - \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} f(x_0)}{g(x_0)g(x_0+h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}
 \end{aligned}$$

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x)$ $f(x) = \begin{cases} 2 + \ln(x), & x \geq 1 \\ x^2 - x + 2, & x < 1 \end{cases}$

f dérivable en 1 ? pour $x \geq 1$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{2 + \ln(x) - 2 + \ln(1)}{x-1} = \frac{\ln(x) + \ln(1)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

pour $x < 1$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x^2 - x + 2 - 2}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 1.$$

Donc $\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$, donc $f'(1) = 1$.

