CM2 : Maths.

* Soit $f : E \mapsto F$ une application.

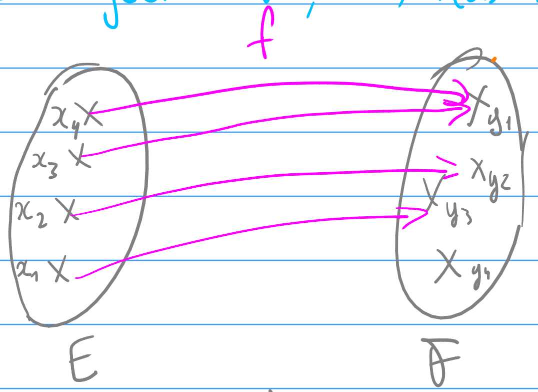
f est injective si $\forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a au + une sol dans E

f est surjective si $\forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a au moins une sol dans E.

f est bijective si $\forall y \in F$, $\exists!\, x \in E$, $y = f(x)$.

① f bijective $\Leftrightarrow$ f injective et surjective.

②. f injective. $\forall a, b \in E$, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.



f $\varnothing$ injective car $x_3 \neq x_4$

f $\varnothing$ surjective car y_4 n'a pas d'antécédant.

$f : [-4;5] \mapsto [-1;4]$

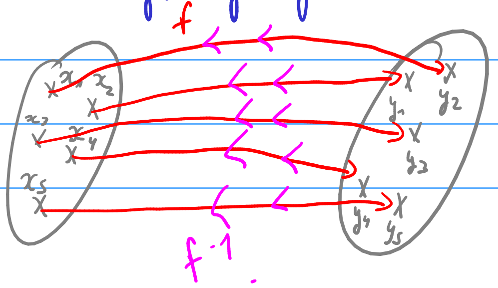
f pas injective (image a ++ antécédents) mais surj

* Si $f : E \mapsto F$ bijective, alors $\forall y \in F$ $\exists!\, x \in E$ tel que $y = f(x)$

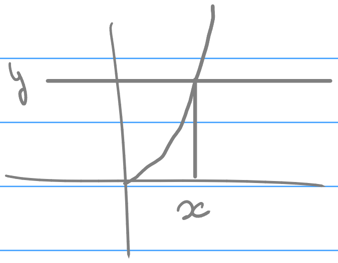
On définit alors f^{-1} l'applicat° réciproque de f notée $f^{-1} : F \mapsto E$

On a $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in E$.

et $f(f^{-1}(y)) = y$ $\forall y \in F$.



Soit $f : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$
$x \longmapsto x^2$



Mq f est bijective calculer f^{-1}
soit $y \in F$. On cherche à résoudre
$y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$.
$\iff y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$
f est bijective car il n'y a qu'une solut°
$\forall y \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

* Composit° d'applicat°.

Si $f : E \longmapsto F$ et $g : F \longmapsto G$
On note $g \circ f : E \longmapsto G$
$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
$g \circ f$ s'appelle la composée de g par f.

Remarque Si $f : E \longmapsto F$ bij.
$\forall x \in E \ f^{-1}(f(x)) = x$
autrement dit, $f^{-1} \circ f = Id_E$.
où $Id_E : E \longmapsto E$
$x \longmapsto x$

* Image directe, image réciproque.

Soit $f : E \longmapsto F$. Soit $A \subset \mathcal{P}(E)$
$B \subset \mathcal{P}(F)$.
On note $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \rightarrow$ Image directe de A par f

Cas Particulier : Si $A = E$.

$f(E) = \{f(x) : x \in E\}$ (image de F).

f surjective $\iff f(E) = F$.

Soit $B \in \mathcal{P}(F)$ on note $f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$.
$f^{-1}(B)$ s'appelle l'image réciproque de B par f.

⚠ Pour définir l'image réciproque on ne suppose pas que f bijective

II. Ensembles finis et dénombrements.

+ définition : Soit E un ensemble. E est fini ($E \neq \emptyset$).
s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection φ de E sur $[\![1;n]\!]$
L'entier n est unique et s'appelle le cardinal de E et on note
$\text{card}(E) = n$.
On pose par convention $\text{card}(\emptyset) = 0$

Intuitivement, le cardinal d'un ensemble fini E correspond au nombre d'éléments de E.
$\varphi : E \mapsto [\![1;n]\!]$. alors on a,

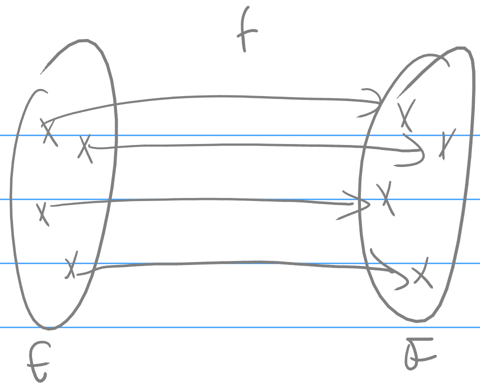
$$E = \{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \dots, \varphi^{-1}(n)\} \text{ et } \varphi(i) \neq \varphi(j) \text{ si } i \neq j$$

+ Propriétés admises

(i). $A \cup B$ et $A \cap B$ sont des ensembles finis, alors.
$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

(ii). Si $B \subset A$, alors $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$. et de plus, on a $\text{card}(B) = \text{card}(A)$ si $B = A$.

(iii) si $f : E \mapsto F$ et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$
alors f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective



f inj donc surj donc bij

* Coefficient du binôme de Newton.

Définit° : Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{k}$

$E = \{a;b;c\}$. Les parties de E à 2 éléments sont

$\{a;b\}, \{a;c\}, \{b;c\}$. $\binom{3}{2} = 3$.

Si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

On a :

* $\binom{n}{0} = 1$

* $\binom{n}{1} = n$

* $\binom{n}{n} = 1$

* $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ car si $card(E) = n$, compter le nombres de parties à k éléments revient à compter le nombre de parties de $C_E A$ (qui a $n-k$ éléments).

Proposition : Pour $0 \leq k \leq n$, on a :

$$* \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Preuve :

Soit E un ensemble à n éléments.

Soit $a \in E$ et $E' = E \setminus \{a\}$.

Il y a deux sortes de parties de A dans à k éléments

-> celles qui ne contiennent pas a : ce sont des parties de E' (qui a $n-1$ el). il y a $\binom{n-1}{k}$.

-> celles qui contiennent a. $A = \{a\} \cup A'$.

Avec A' une partie de E'. Il y a $\binom{n-1}{k-1}$

$0! = 1$. $n! = n \times (n-1) \times 3 \times 2$

(**) Propositº : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$. preuve -> exo.

Théorème :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

<u>démo de (**)</u> :

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On se propose de démontrer n par récurrence.

Inialisation pour $n=0$.

On a $0 \leq k \leq n$. Si $n=0$, alors $k=0$.

$\binom{0}{0} = \frac{1}{1}$. ok

Hérédité :

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \quad (HR).$$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n!(k-1)!(n-k+1)!}{k!(k-1!)(n-k)!(n-k+1)!} + \frac{n!\ k!(n-k)!}{k!(k-1)!(n-k)!(n-k+1)!}$$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n!(k-1)!(n-k+1)! + n!\,k!(n-k)!}{k!(k-1)!(n-k)!(n-k+1)!}$$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n!\left((k-1)!(n-k+1) + k!\,(n-k)!\right)}{k!(k-1)!(n-k)!(n-k+1)!}$$