CM 20 : Maths.

*** Théorème** : Soit $f :]a;b[\to]c;d[$, $x_0 \in]a;b[$.
$g :]c;d[\to \mathbb{R}$.

Supposons que $\left|\begin{array}{l} f \text{ est dérivable en } x_0 \\ g \text{ est dérivable en } x_0. \end{array}\right.$

alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $\boxed{(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)}$

*** Preuve** : f d° en x_0 d'où $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0) \varepsilon_1 (x - x_0)$

(1) D'où $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(f'(x_0) + \varepsilon_1(x))$

(2) Pareil pour g, on a $g(y) - g(y_0) = (y - y_0)(g'(y_0) + \varepsilon_2(y))$

car g d° en $y_0 = f(x_0)$.

en remplaçant y par $f(x)$ dans (2), on a :

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = (f(x) - f(x_0))(g'(f(x_0)) + \varepsilon_2(f(x)))$$

par (1), on a :

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = (x - x_0)(f'(x_0) - \varepsilon_1(x))(g'(f(x_0)) + \varepsilon_2(f(x))).$$

D'où $$\frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{(f'(x_0) + \varepsilon_1(x))}_{\substack{x \to x_0 \\ \downarrow \\ f'(x_0)}} \underbrace{(g'(f(x_0)) + \varepsilon_2(f(x)))}_{\substack{x \to x_0 \\ g'(f(x_0)).}}$$

Donc : $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.

$f(x) = \ln(x^2+x+1)$.

$x \longrightarrow x^2+x+1$ défini & d° sur $\mathbb{R}$, $x \longrightarrow \ln(x)$ défini & d° sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le discriminant de x^2+x+1 est $\Delta = 1-4 = -3 < 0$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 > 0$.

Donc f d° sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

* Théorème : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et s^t monotone sur I. (Alors on sait que $J = f(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$ et que f est une bijection de I sur J et f^{-1} C° sur J).

Supposons que f d° en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$.

Alors f^{-1} d° en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

* Preuve : On écrit $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ pour $y \in J = f(I)$,

$\exists! x \in I$ tq $y = f(x)$. Donc : $y \neq y_0 \Leftrightarrow f(x) \neq f(x_0) \Leftrightarrow x \neq x_0$.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}}$$

Comme f^{-1} C^0, $x = f^{-1}(y) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} f^{-1}(y_0) = x_0$.

D'où : $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$

$\ln : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et réalise une bij de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
et $\forall x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$.

Donc $\exp : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(y) = \frac{1}{\ln'(x)}$ où $y = \ln(x)$.

$\exp'(y) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = \exp(y)$. Donc $\exp'(y) = \exp(y)$.

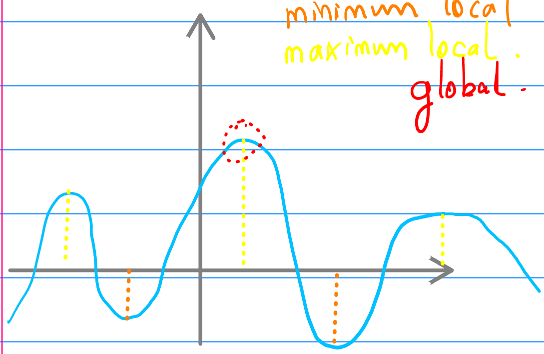
Extremum local et dérivée.

***Définition** : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

- On dit que f a un minimum local en x_0 s'il existe $\delta > 0$
maximum local

tel que $\forall x \in]x_0 - \delta ; x_0 + \delta[\cap I$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$
$f(x) \leqslant f(x_0)$.

minimum local
maximum local.
global.



* **Théorème** : si f d° sur I et si $x_0 \in \mathring{I}$

Supposons que f admet un extremum en x_0, alors $f'(x_0)=0$.

* **Preuve** 1er cas : f admet un max local en x_0.

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \quad \forall x \in]x_0-\delta ; x_0+\delta[$ pour $\delta > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in]x_0 ; x_0+\delta[, \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \text{ donc } f'(x) \geqslant 0. \\ \forall x \in]x_0-\delta ; x_0[, \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0 \text{ d'où } f'(x) \leqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=0.$$

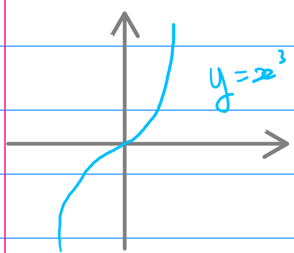
2^e cas : on peut regarder $-f$ pour se ramener au cas 1.

* **Remarque** : soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \to x$

(1) $\forall x \in [0;1]$, $f(x)=x \geqslant 0 = f(0)$ Donc f admet un minimum global en 0.

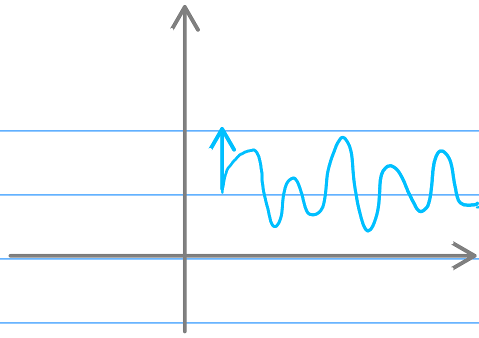
$f'(x)=1$ et $f'(0)=1 \neq 0$.

(2) $f'(x_0)=0 \not\Rightarrow f$ admet un extremum en x_0



$f'(0)=0$ mais 0 n'est pas un extremum.

* **Théorème de Rolle** : soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et d° sur $]a;b[$. si $f(a)=f(b)$, alors $\exists c \in]a;b[$ tq $f'(c)=0$



*** Preuve** : Comme $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ C^0 sur $[a;b]$, on sait qu'il existe $c_1, c_2 \in [a;b]$ tq $\forall x \in [a;b]$, $f(c_1) \leqslant f(x) \leqslant f(c_2)$.

- 1er cas : $c_1 \in]a;b[$,

  Comme f admet un minimum (global) sur c_1, le thm précédent dit que $f'(c_1) = 0$.

- 2e cas : $c_2 \in]a;b[$,

  de m̂, f admet maximum en $c_2 \Rightarrow f'(c_2) = 0$.

- 3e cas : $c_1, c_2 \notin]a;b[$.

  Donc $c_1, c_2 \in \{a;b\}$. Comme $f(a) = f(b)$, on a $f(c_1) = f(c_2)$

Donc $\forall x \in [a;b]$, $f(x) = f(c_1) \Rightarrow \forall x \in]a;b[$, $f'(x) = 0$.