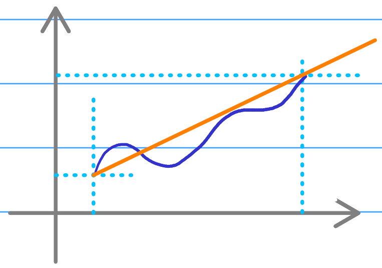
CM21 : Maths.

* Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

Alors $\exists c \in]a;b[$ tq :

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)}$$



Δ a pour pente : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

* Preuve

$$h : [a;b] \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto (f(b) - f(a))t - (b-a)f(t)$$

h C^0 sur $[a;b]$ car f et $t \mapsto t$ C^0 $[a,b]$.

h d° $]a;b[$

- $h(a) = (f(b) - f(a))a - (b-a)f(a) = af(b) - \cancel{af(a)} - bf(a) + \cancel{af(a)}$

- $h(b) = (f(b) - f(a))b - (b-a)f(b) = af(b) - bf(a) = h(a)$.

$h(a) = h(b)$. Donc d'après le Thm de Rolle, $\exists c \in]a;b[$ tq $h'(c) = 0$.

Or $h'(t) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(t) \Rightarrow f(b) - f(a) - (b-a)f'(c) = 0$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

* Corrolaire (inégalité des accroissements finis).

Soit $f : [a;b] \longmapsto \mathbb{R}$ $C^0[a;b]$ et $d^0\,]a;b[$ et si $M = \sup_{x\in]a;b[} |f'(x)| < +\infty$

Alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

Soit $u_0 \in [0;1]$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n^2}$, $n \geq 0$ (u_n) converge ?

Soit $f : [0;1] \longmapsto \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

$x \mapsto 1+x^2 \nearrow$ sur $[0;1]$ donc $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2} \searrow$ sur $[0;1]$

$x \in [0;1] \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(0). \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq 1.$
$\Rightarrow \forall x \in [0;1], f(x) \in [0;1].$

Par récurrence, on montre que $\forall x \in [0;1], f(x) \in [0;1]$.

* Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ et $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f C^0 $[0;1]$,

alors $\ell = f(\ell)$ ⚠ il faut que f soit continue.

$\Rightarrow \ell + \ell^3 = 1 \Rightarrow \ell^3 + \ell - 1 = 0$.

Mq : $\exists! \ell \in [0;1]$ tq $\ell^3 + \ell - 1 = 0$.

$h : [0;1] \longmapsto \mathbb{R}$ $x \longmapsto x^3 + x - 1$	h d^0 et $h'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow h$ $s^t \nearrow$. h C^0

Donc h réalise une bijection de $[0;1]$ vers $[h(0); h(1)] = [-1;1]$

$h(x)=0$ a une unique solut° dans $[0;1]$ Donc : $\exists!\, \ell \in [0;1]$ tq $\ell^3+\ell-1=0$.
Pour approximer $\ell \Rightarrow$ dichotomie.

* Mq $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.

$$|u_{n+1}-\ell| = |f(u_n)-f(\ell)| \leq M|u_n-\ell| \leq \dots \leq M^n|u_0-\ell| .$$

Essayons de prouver que : $\sup\limits_{x\in[0;1]} |f'(x)| < 1$.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \times 2(1+x^2)\times 2x}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Pour $x\in[0;1]$, $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x^2-2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	↘		↗	$-\frac{1}{2}$

$$\sup_{x\in[0;1]} |f'(x)| = \sup_{x\in[0;1]} -f'(x) = -f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} = M$$

* Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n-\ell| < M^n|u_0-\ell|$

Pour $n=0$, c'est évident

On suppose que $|u_n-\ell| < M^n|u_0-\ell|$ pour n quelconque. Montrons pour $n+1$.

$|u_{n+1}-\ell| = |f(u_n)-f(\ell)| \leqslant M|u_n-\ell|$ (inégalité des accroissements finis).

$\Rightarrow |u_{n+1}-\ell| \leqslant M \cdot M^n |u_0-\ell|$ (HR)

$\Rightarrow |u_{n+1}-\ell| \leqslant M^{n+1}|u_0-\ell|$.

Donc par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n-\ell| \leqslant M^n|u_0-\ell|$.

Comme $0<M<1$, $M^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

*** Théorème** Soit $f :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ d^o $]a;b[$

(a). Si $\forall x \in]a;b[$, $f'(x) \geqslant 0 \Rightarrow f \nearrow$
$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ $s^t \nearrow$.

(b). Si $\forall x \in]a;b[$, $f'(x) \leqslant 0 \Rightarrow f \searrow$
$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ $s^t \searrow$

(c). Si $\forall x \in]a;b[$, $f'(x)=0 \Rightarrow f$ c^{ste}.

*** Preuve**

(a) soient $x_1, x_2 \in]a;b[$ tq $x_2 > x_1$, f $C^0[x_1;x_2]$ et d^o $]x_1;x_2[$

Donc le Thm des accroissements fini implique : $\exists c \in]x_1;x_2[$ tq
$f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1)f'(c)$.

$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1) \geqslant 0 \Rightarrow f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

* Retour sur les fct° convexes.

-> Rappel sur l'inégalité des pentes.

I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$.

f cvx <=> elle vérifie l'inégalité des pentes.

$\forall a, b, c \in I$, $a < c < b$, on a :

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}. \quad (*)$$

*** Théorème :** Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fct° cvx sur I,

alors $\forall x_0 \in I$, l'applicat° $\tau_{x_0} : \begin{array}{l} I \setminus \{x_0\} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}$ est croissante.

*** Preuve :** Soient $x_1, x_2 \in I \setminus \{x_0\}$ tq $x_1 < x_2$

<u>1er cas</u> : $x_0 < x_1 < x_2$

D'après $(*)$, on a : $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \Rightarrow \tau_{x_0}(x_1) \leq \tau_{x_0}(x_2)$

<u>2e cas</u> $x_1 < x_0 < x_2$.

D'après $(*)$, on a : $\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \Rightarrow \tau_{x_0}(x_1) \leq \tau_{x_0}(x_2)$

Corrolaire : Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$

Alors f admet des dérivées à droite et à gauche $\forall x \in I$ et f $C^0 I$.

Preuve : Soit $x_0 \in I$. On sait que τ_{x_0} : $\begin{array}{l} I \setminus \{x_0\} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}$ est $\nearrow$.

Donc $\lim\limits_{x \mapsto x_0^-} \tau_{x_0}(x)$ et $\lim\limits_{x \mapsto x_0^+} \tau_{x_0}(x)$ existent et sont finies.

$f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \mapsto x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \mapsto x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existent.

$\varepsilon(x) : \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f_d(x_0) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

$(x-x_0)\varepsilon(x) = f(x) - f(x_0) - (x-x_0) f'_d(x_0)$.

D'où $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Donc f C^0.