CM22 :

*** Théorème** : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, alors :

$$\boxed{f \text{ convexe} \Leftrightarrow f' \nearrow .}$$

*** Preuve** : On suppose f convexe. Mq $f' \nearrow$, càd si $x, y \in I$,

$$x < y \Rightarrow f'(x) \leq f'(y).$$

Soit z tq $x < z < y$. L'inégalité des pentes nous dit que :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-y} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \quad (*)$$

Faisons tendre z vers x dans $(*)$. Alors :

$$f'(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

Faisons tendre z vers y dans $(*)$. Alors :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$$

$$\Rightarrow f'(x) \leq f'(y).$$

Réciproquement, supposons f' croissante. Montrons qu'elle est convexe.

Soit $x, y \in I$, $a = \lambda x + (1-\lambda)y$, $\lambda \in [0;1]$.

On doit montrer que : $f(a) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

On applique le Θm des accroissements finis, donc

$\exists c_1 \in]x;a[$ tq $f'(c_1)(a-x) = f(a)-f(x)$
$\exists c_2 \in]a;y[$ tq $f'(c_2)(y-a) = f(y)-f(a)$.

Comme $c_1 < c_2$, on a $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$.

$$\Rightarrow \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}.$$

Comme $x<a$, si on multiplie par $a-x>0$, on obtient :

$$f(a)-f(x) \leqslant \frac{a-x}{y-a}\left(f(y)-f(a)\right) = \frac{a-x}{y-a}f(y) - \frac{a-x}{y-a}f(a).$$

D'où $f(a)\left(1-\frac{a-x}{y-a}\right) \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$

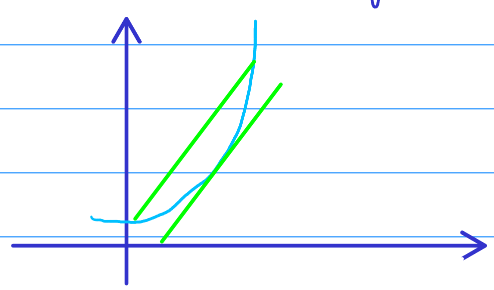
On a $a-x = \lambda x + (1-\lambda)y - x = (1-\lambda)(y-x)$
$y-a = y-\lambda x-(1-\lambda)y = y(1-1+\lambda)-\lambda x = \lambda(y-x)$

D'où $\frac{a-x}{y-a} = \frac{(1-\lambda)(y-x)}{\lambda(y-x)} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$, et $1+\frac{ax}{y-x} = \frac{1}{\lambda}$.

Alors, $f(a)\times\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1-\lambda}{\lambda}f(y)+f(x)$.

$\Rightarrow f(a) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

*** Corrolaire** soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ d° sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, alors C_f est au dessus de ses tangentes.



c'est-à-dire : $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$

*** Preuve (idée)** On utilise que si f cvx, alors $\forall x, y \in I$, on a $f'(x) \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$

*** Corollaire** : soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fct° deux fois dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$,

Alors f cvx $\Leftrightarrow \forall x \in I, f^{(2)}(x) \geq 0$.

*** Preuve** : f cvx $\Leftrightarrow f' \nearrow$. $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (f')'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$.

- Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$. f deux fois d° et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^x > 0$.

Donc f cvx. $\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0;1], e^{\lambda x + (1-\lambda)y} \leq \lambda e^x + (1-\lambda)e^y$

- Soit $f : \begin{array}{l}]0;+\infty[\mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{array}$. f d° $]0;+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ d° $\mathbb{R}_+^*$, f est 2 fois d° et $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Donc f concave, alors :

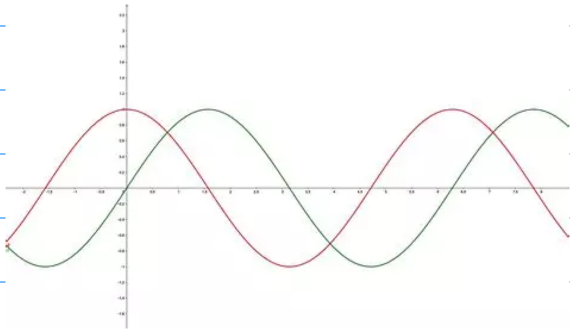
$$\forall x, y > 0, \forall \lambda \in [0;1], \ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)$$

Chapitre 9 : Fonctions trigonométriques Réciproques.

Quelques rappels sur les fonctions trigonométriques.

Les fonct° $\cos : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos x\end{array}$ $\sin : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin x\end{array}$ sont définies, continues et dérivables, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$; $\sin'(x) = \cos(x)$.

De ①, cos est paire et sin impaire, et sont 2π périodiques.

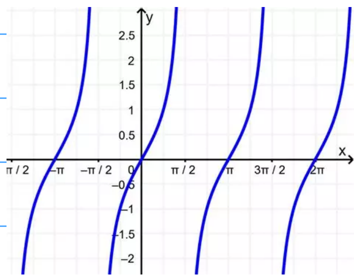


La fct° $\tan : \begin{array}{l}\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\end{array}$,

est définie, c° et d° $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

tan est π-périodique et impaire,



Connaître les valeurs de 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$

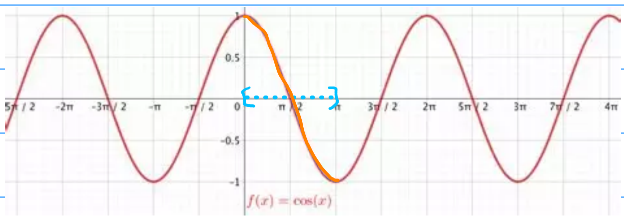
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\cos(\alpha) = \cos\beta \iff \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin(\alpha) = \sin\beta \iff \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi k \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$.

$\tan(\alpha) = \tan\beta \iff \alpha = \beta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Fonct° trigo réciproques.

ⓐ. 

$\cos : \begin{array}{l} \mathbb{R} \mapsto [-1;1] \\ x \mapsto \cos(x). \end{array}$

La fonct° cos C° et st ↘ sur $[0;\pi]$. On sait que cos est une bijection° de $[0;\pi]$ sur $[\cos\pi ; \cos 0] = [-1;1]$

$$\cos : [0;\pi] \xrightarrow{\cos} [-1;1]$$

$\cos^{-1} = \arccos$.

On définit la fct réciproque de $\cos : [0;\pi] \mapsto [-1;1]$ qu'on appelle arc cos qu'on note $\arccos : [-1;1] \mapsto [0;\pi]$.

arccos c° st ↘, on a, pour $x \in [-1;1]$,

$$\boxed{\theta = \arccos(x) \iff \begin{cases} \cos(\theta) = x \\ \text{et} \\ \theta \in [0;\pi]. \end{cases}}$$

De +, on a : $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$
$\forall \theta \in [0;\pi]$, $\arccos(\cos\theta) = \theta$.

* **Théorème** : La fonct° arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et $\forall x \in]-1;1[$,

$$\boxed{\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

* **Preuve** : Si $f : I \mapsto J$ bij, si f d° I et $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$,

Alors f^{-1} d° J et $\forall y \in J$ $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$,

où $y = f(x)$.

$\cos : [0;\pi] \mapsto [-1;1]$ d° et $\cos'(x) = -\sin x$. et $\cos'(x) \neq 0$ $\forall x \in]0;\pi[$.

Donc arccos d° $]-1;1[$ et $\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(x)}$ où $y = \cos x$.

$\Rightarrow \arccos'(y) = -\frac{1}{\sin x}$. Or $y^2 = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\Rightarrow \sin^2(x) = 1 - y^2 \Rightarrow \sin x = \pm\sqrt{1-y^2}$. Or $x \in [0;\pi]$ donc $\sin x \geq 0$.

Donc $\sin x = \sqrt{1-y^2}$. d'où $\arccos'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.