CM23 : Maths.

La fonct° sinus sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ C^0 d^0 $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

$\sin'(x) = \cos(x) > 0.$

$\Rightarrow$ sin $s^t \nearrow$ sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

Donc $\sin : [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \longmapsto [-1;1]$ une bij.

La réciproque de sin est arcsin

Si $x \in [-1;1]$, $\theta = \arcsin(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta = x \\ \theta \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \end{cases}$

arcsin est définie et C^0 sur $[-1;1]$.

arcsin d^0 sur $]-1;1[$ et $\forall x \in]-1;1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$

Donc $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$

On sait que $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\arcsin(x)) \geq 0.$

Donc, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

D'où $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Voir les graphes de arccos et arcsin.

Exemples types :

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$. On cherche θ tel que $\sin\theta = -\frac{1}{2}$,

avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, alors $\theta = -\frac{\pi}{6}$ car $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Donc $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Calculer $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\theta \in [0;\pi]$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in [0;\pi]$ Donc

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

* arctan.

$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \mathbb{R}$ définie d° $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$.

$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ C^0 st $\nearrow$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

tan bij de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

On définit $\arctan : \mathbb{R} \longmapsto \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction réciproque de $\tan(x)$

définie $C^\circ \mathbb{R}$. De plus, arctan $d^\circ \mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan(x))}$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}. \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Résoudre l'équation : $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$

Etudions $f : \arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

f définie $d^\circ \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{2}{1+(2x)^2} + \dfrac{1}{1+x^2} > 0$

$\Rightarrow f$ $s^t \nearrow$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\pi$ $\nearrow$	π

$\Rightarrow f$ bij de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi ; \pi[$.

Cherchons x_0.

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

$\arctan(2x_0) + \arctan(x_0) = \frac{\pi}{4}$.

Donc $\tan(\arctan(2x_0) + \arctan(x_0)) = 1$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\arctan(2x_0)) + \tan(\arctan(x_0))}{1 - \tan(\arctan(2x_0))\tan(\arctan(x_0))} = \frac{3x_0}{1-2x_0^2} = 1 \Rightarrow 2x_0^2 + 3x_0 - 1 = 0.$$

On a $\Delta = 9 - 4 \times 2(-1) = 9 + 8 = 17 > 0$. $x_{0_1} = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$; $x_{0_2} = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$

Comme $f(0)=0$, $f(x_0)>f(0) \Rightarrow x_0>0$ donc $x_0=x_{0_2}$

Exercice Mq : ⓐ. $\forall x\in[-1;1]$, $\arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$,

ⓑ $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & x>0.\\ -\frac{\pi}{2}, & x<0\end{cases}$

$f: \begin{array}{l}[-1;1]\longmapsto\mathbb{R}\\ x\longmapsto\arccos(x)+\arcsin(x)\end{array}$ f définie sur $[-1;1]$ et d° $]-1;1[$.

$f'(x)=\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$ $\exists a\in\mathbb{R}$, $\forall x\in[-1;1]$, $f(x)=a.$

$f(0)=\arccos(0)+\arcsin(0)=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}.$

ⓑ $g: \begin{array}{l}\mathbb{R}^*\longmapsto\mathbb{R}.\\ x\mapsto\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\end{array}$

g définie, C^0 d^0 $\mathbb{R}^*$

$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\times-\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0.$

Donc $\exists c_1,c_2\in\mathbb{R}$ tq $g(x)=\begin{cases}c_1 \text{ si } x>0\\ c_2 \text{ si } x<0\end{cases}$

$g(1)=\arctan(1)+\arctan\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$

arctan impaire, donc $c_2=-\frac{\pi}{2}.$

Voilà.