CM24 : Maths.

Exemple ① d'étude de fct°.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

ⓐ. Domaine de définit°. $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

ⓑ périodicité ou parité.

f n'est ni paire ni impaire et n'est pas périodique.

ⓒ Signe de la dérivée + tableau de variat°.

comme f est une fract° rationnelle, f d° $\mathcal{D}_f$

et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \times 2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$

$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x-1} \geqslant 0$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

d) limite aux bornes du domaine de déf

$\lim_{x \to 1} x^3 = 1$; $\lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0^+$; $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} \sim \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} \sim \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

e) asymptotes.

Comme $\lim_{x \to 1} = +\infty$, on a une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Etude en $+\infty$. Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on peut éventuellement chercher une asymptote oblique.

Il faut donc étudier $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \frac{x^2}{(x-1)^2}$. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = a$.

On regarde ensuite $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax$

$f(x) - ax = f(x) - x = \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - (x-1)^2 x}{(x-1)^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} 2$

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 2$

Donc f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équat° $\Delta : y = x + 2$.

Position de la courbe par rapport à son asymptote.

on doit étudier le signe de : $f(x) - (x+2)$ en $+\infty$

$$f(x) - x - 2 = \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} - 2 = \frac{2x^2 - x - 2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{2x^2} - x - \cancel{2x^2} + 4x - 2}{(x-1)^2} = \frac{3x-2}{(x-1)^2} \geqslant 0$$

$x \geqslant \frac{2}{3}$.

Donc, C_f est au dessus de Δ au voisinage de $+\infty$

De façon analogue, C_f admet une asymptote oblique en $-\infty$ d'équat°

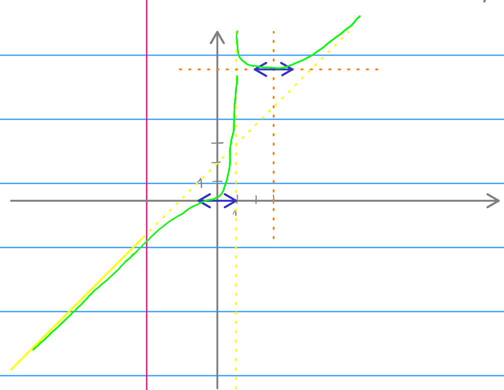
$\Delta : y = x+2$ et C_f en dessous de Δ.

(f) étude des points d'inflexions éventuels.

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \quad ; \quad f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^{\cancel{3}} - (x^3 - 3x^2) \times 3\cancel{(x-1)}^{2}}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{\cancel{3x^3} + \cancel{3x^2} - \cancel{6x^2} + 6x - \cancel{3x^3} + \cancel{3x^2}}{(x-1)^4} = \frac{6x^2}{(x-1)^4}$$

Donc f cvx sur $[0 ; +\infty[\setminus \{1\}$ et concave sinon.



C_f.

② $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

arctan définie C° d° $\mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) pas de parité / périodiaté.

c) $f'(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) \times \frac{1}{1+\frac{1}{(x+1)^2}}$

$= 2x \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{\frac{(x+1)^2+1}{(x+1)^2}} = 2x \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x^2}{(x-1)^2+1}$

$= x \underbrace{\left[2\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x}{(x+1)^2+1}\right]}_{g(x)}$.

car $\Delta < 0$.

$g'(x) = \frac{-2}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2+1 - x \times 2(x+1)}{((x+1)^2+1)^2} = \frac{-(x^2+4x+6)}{((x+1)^2+1)^2} \leq 0$

$((x+1)^2+1)^2 \geq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $g'(x) \leq 0$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖		$-$		
$g(x)$	0	↘	‖		↘		0
x		$-$	‖		0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$-\frac{\pi}{2}$ ‖ $\frac{\pi}{2}$	↘	0	↗	

$$f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to -1^+} \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x \to \infty} \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{2}$$