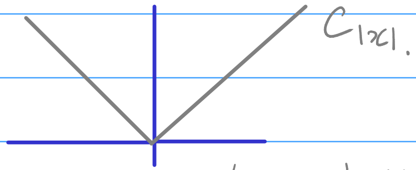
CM3 Maths.

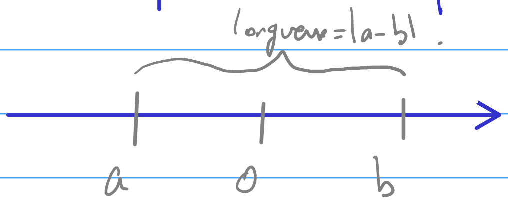
* Chapitre 2 : Nombres réels et suites

I Valeur absolue de x

Soit $x \in \mathbb{R}$. $|x| = \max(x; -x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$



$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$



$\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| = |x||y|$ et $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

⚠ $|x| + |y| \neq |x + y|$

* Soit $R > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$|x| \leqslant R \iff \max(x; -x) \leqslant R$.

$\iff x \leqslant R$ et $-x \leqslant R$

$\iff x \leqslant R$ et $x \geqslant -R$

$\iff -R \leqslant x \leqslant R$

$\{x \in \mathbb{R}, |x| = R\} = [-R; R]$

Soit $R > 0$, $x, a \in \mathbb{R}$

$|x-a| \leqslant R \iff -R \leqslant x-a \leqslant R \iff a-R \leqslant x \leqslant a+R$.

Donc $\{x \in \mathbb{R}, |x-a| \leqslant R\} = [a-R ; a+R]$.

$\boxed{\text{* Théorème : Inégalité triangulaire}}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.
(ii) $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$.

*Preuve :

(i). $|x| = \max(x ; -x)$

$x \leqslant |x|$

$-x \leqslant |x| \iff x \geqslant -|x|$.

$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

$-|y| \leqslant y \leqslant |x| \implies -|x|-|y| \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$

On pose $R = |x+y| \implies -R \leqslant x+y \leqslant R$. Donc $|x+y| \leqslant R \implies |x+y| \leqslant |x|+|y|$

(ii) On a : $|x| = |(x+y)-y|. \leqslant |x-y|+|y|$.

Donc $|x|-|y| \leqslant |x-y|$.

On déduit que $|y|-|x| \leqslant |y-x| = |x-y|$.

Alors, $||x|-|y|| = \max(|x|-|y| ; |y|-|x|) \leqslant |x-y|$.

II) Borne supérieure/inférieure.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $M, m \in \mathbb{R}$

* M est un majorant de A si $\forall x \in A, x \leq M$
* M est un maximum de A si $M \in A$ et $\forall x \in A, x \leq M$
* m est un minorant de A si $\forall x \in A, x \geq m$
* m est un minimum de A si $m \in A$ et $x \in A, x \geq m$

$A = [0;1[$. * 1 est un majorant de A car $\forall x \in A, x \leq 1$.

* A n'a pas de maximum. Preuve.

On suppose que A a un maximum M. Donc $M \in A$

On prend $1 - \frac{1}{n} \in A \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \leq M$

$n \to +\infty$

$1 \leq M$. absurde car $M < 1$.

* 0 est un minorant de A car $\forall x \in A, x \geq 0$ et $0 \in A$.
Donc 0 est un minimum.

* Théorème-déf

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ non vide et majorée, elle possède un plus petit majorant M qu'on appelle borne supérieure de A.
noté $M = \sup(A)$.

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ non vide et minorée possède un plus grand majorant m qu'on appelle borne inférieure de $m = \mathrm{Inf}(A)$

Preuve = admise.

$A = [0;1[$. A majoré par 1, $A \neq \emptyset$ On a $\sup(A) = 1$.

En effet, * 1 est un majorant.

* 1 est le plus petit des majorants.

Si M est un majorant de A, alors $1 - \frac{1}{n} \leq M$. en faisant tendre n vers $+\infty$, on a $1 \leq M$

*Remarque : si A possède un maximum M, alors $\sup(A) = M$

$\boxed{\text{* Théorème : caractérisation de la borne sup/inf avec des } \varepsilon}$

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $M, m \in \mathbb{R}$.

(i). On suppose A majorée. Alors $M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x. \end{cases}$

(ii). On suppose A minorée. Alors $m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < m + \varepsilon \end{cases}$

K est un majorant de A si $\forall x \in A$, $x \leq K$.
K n'est pas un majorant de A si $\exists x \in A$, $x > K$

Preuve du Θrème (i).

On suppose $M = \sup(A)$.

* M est un majorant, donc $\forall x \in A$, $x \leq M$.

* Soit $\varepsilon > 0$, comme M est le plus petit des majorants de A, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A donc $\exists x \in A$, $M - \varepsilon < x$.

Supposons que $\begin{cases} \forall x \in A, x \leqslant M \text{ (i)} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x. \text{ (ii)} \end{cases}$

Montrons que $M = \sup(A)$.

M est un majorant de A d'après (i)
Montrons que M est le plus petit des majorants.

Soit M' un majorant de A. On doit montrer que $M \leqslant M'$.

On suppose par l'absurde que $M \geqslant M'$.

On pose $\varepsilon = M - M' > 0$.

d'après (ii), $\exists x \in A$ tq $x > M - \varepsilon = M - (M - M') = M'$.

Donc $M' \geqslant x > M'$ absurde.

Donc $M \leqslant M'$, donc $M = \sup(A)$.

$\boxed{\text{Corrolaire : } \mathbb{R} \text{ est archimédien}}$

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $na > b$.

<u>Preuve par l'absurde</u>

On suppose que : $\exists a > 0, \exists b \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, na \leqslant b$.

On pose $A = \{na ; a \in \mathbb{R}_+^*\} = \{0 ; 2a ; 3a ; 4a ; \dots\}$

$A \neq \emptyset$. A est majorée par b. Donc A admet une borne sup $M = \sup(A)$

On a $0 \leq a \leq M$.

$\frac{M}{2} < M \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$, tq $n_0 a > \frac{M}{2}$

$\Rightarrow -M < 2n_0 a \leq M$. Absurde.