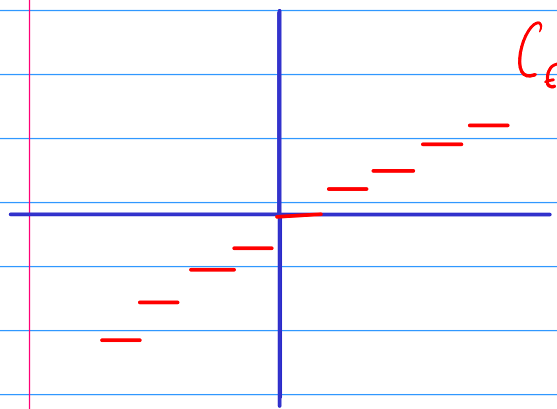
CM4 : Maths.

Rappel : $\mathbb{R}$ est archimédien ; $\forall (a;b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $na > b$

* Théorème - définition (existance de la partie entière).

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\exists ! n \in \mathbb{Z}$ tq $n \leqslant x < n+1$
L'entier n s'appelle la partie entière de x.
$n = E(x) = \lfloor x \rfloor$

$E(3,57) = 3$. $E(-2,3) = -3$



* Preuve pour $x \geqslant 0$.

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, $\exists N \in \mathbb{N}$
tq $N > x$
Soit $E \{k \in \mathbb{N}, k \leqslant x\}$
* $E \neq \emptyset$ car $0 \in E$.
* E est majoré par N
* E contient au plus N éléments donc il possède un maximum qu'on note n. Comme $n \in E$, on a $n \leqslant x$
et $n+1 \notin E$ donc $n+1 > x$
Ce qui prouve l'existance de $n \in \mathbb{Z}$ tq $n \leqslant x < n+1$.

On suppose $\exists p \in \mathbb{Z}$ tq

$p \leq x < p+1$.

on a $p \leq x < n+1$

$n \leq x < p+1$

Si $p \neq n$, alors $p < n$ ou $p > n$.

si $p < n$ alors $p+1 \leq n$ ce qui contredit $p < n$

si $p > n$ alors $p \geq n+1$ ce qui contredit $p > n$.

* Densité

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si :

$\forall -\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, $]a;b[\cap A \neq \emptyset$.

* Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

preuve :

$-\infty < a < b < +\infty$

On cherche un $r \in \mathbb{Q}$, tq $r = \frac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

$\frac{p}{q} \in]a;b[\iff a < \frac{p}{q} < b \iff aq < p < bq$

$b-a > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, $\exists q \in \mathbb{N}^*$ tq $q(b-a) > 1$

On pose ensuite $p = E(aq)+1$

$p-1 = E(aq) \leq aq < E(aq)+1 = p$.

Donc $aq < p$.

$p-1 \leq aq \Rightarrow p \leq aq+1 \leq \cancel{aq} + q(b-\cancel{a}) \leq qb$.

$\Rightarrow p < qb$ Donc $aq < p < qb$, donc $\frac{p}{q} \in]a;b[$

IV) Suite Réelle

Définition : Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = u_n$.

La notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ désigne la suite.

Définition : On dit que (u_n) tend vers $l \in \mathbb{R}$ si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$

Remarque : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, alors elle est unique et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ou $u_n \underset{n\mapsto+\infty}{\longmapsto} l$

$u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$.

Mq $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tq

$n \geq N,\ |u_n - 2| < \varepsilon$.

$$|u_n - 2| < \varepsilon \iff \left|\cancel{2} + \frac{(-1)^n}{n} \cancel{-2}\right| < \varepsilon$$
$$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon$$
$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

On pose alors $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$

si $n \geq N$ alors $n > \frac{1}{\varepsilon}$ donc $|u_n - 2| < \varepsilon$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

Exercice : Mq $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n+4} = 0$

*** Vocabulaire** : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite $l \in \mathbb{R}$.
Sinon elle est divergente.

*** Remarque** : $u_n = (-1)^n$ $1; -1; 1; -1 \ldots$

$u_n = n$ $1; 2; 3; \ldots; +\infty$

*** Définition**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

①. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N \Rightarrow U_n \geq A$.

② . On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$\forall A>0, \exists N\in\mathbb{N}$ tq $n\geq N \Rightarrow u_n \leq -A$

* Proposition : ⓐ. Une suite convergente est bornée
ⓑ. Une suite qui tend vers $\pm\infty$ n'est pas bornée.

* Preuve ⓐ : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et notons $l=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Mq (u_n) est bornée.

D'après la définition de limite (avec $\varepsilon=1$).
$\exists N\in\mathbb{N}$ tq $n\geq N$, $|u_n-l|<1$.

$|u_n|=|u_n-l+l| \leq |u_n-l|+|l|$
$m\geq N \Rightarrow |u_m| \leq 1+|l|$.

Posons $M=\max(|u_0|, |u_1|, \dots ; |u_{N-1}| ; |l|+1)$
On a :
$\forall n\in\mathbb{N}, |u_n|\leq M$
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

ⓑ à lire sur les notes de cours.

* Théorème : Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=l'$

ⓐ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n+v_n)=\lambda l+l'$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

ⓑ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n)=ll'$

ⓒ si $l'\neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{l}{l'}$