CMS: Maths.

Rappel : si $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A majorée :

alors $\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} (i)\ \forall x \in A, x \leq \alpha \\ (ii)\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x \end{cases}$

* Théorème : caractérisation borne sup/inf avec les suites

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, majorée.

$\alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} (i)\ \forall x \in A, x \leq \alpha \\ (ii)\ \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} (\forall n \geq 0, x_n \in A), \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha \end{cases}$

$A = [0;1[$ Mq $\sup(A) = 1$. $\begin{cases} 1 \text{ est un majorant de } A \\ \text{Posons } x_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1, \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha \end{cases}$

Preuve : supposons $\alpha = \sup(A)$. Mq (i) et (ii) sont vraies.

comme $\alpha = \sup(A)$, $\forall x \in A$, $x \leq \alpha$ par définition.
D'après la caractérisation avec des ε : $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ tq $\alpha - \varepsilon < x$.

Appliquons la propriété précédence avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, $n \geq 0$.

$\forall n \geq 0$, $\exists x_n \in A$ tq $\alpha - \frac{1}{n+1} < x_n \leq \alpha$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha - \frac{1}{n+1} = \alpha$, donc par le théorème des gendarmes, on a

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha$. Donc (ii) est vérifiée.

On suppose : $\begin{cases} (i) \ \forall x \in A, x \leq \alpha \\ (ii) \ \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \ (\forall n \geq 0, x_n \in A), \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha \end{cases}$

montrons que $\alpha = \sup(A)$.

Comme (i) est vérifié, il reste à montrer :

* $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ tq $\alpha - \varepsilon < x$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tq

$n \geq N \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow \alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$

Donc, en particulier, $x_N \in A$ et $\alpha - \varepsilon < x_N$

Donc par la caractérisat° avec des epsilons, on déduit $\alpha = \sup(A)$.

Suites à connaitre :

Suites géométriques :

Une suite u_n est géométrique si : $\exists q \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = q u_n$.

Par récurrence, on peut montrer que $u_n = u_0 \times q^n$

* Théorème : soit $u_n = q^n$, $n \geq 0$ où $q \in \mathbb{R}$

1. si $q = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$
2. si $q > 1$, $\lim\limits_{n+\infty} u_n = +\infty$
3. si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
4. si $q \leq -1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Preuve : * Si $q=1$, $u_n=1$ $\forall n\geq 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

* Si $q>1$, posons $a=q-1$. On a $a>0$.

donc $q=1+a$, $a>0$.

$u_n=q^n=(a+1)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k 1^{n-k}$ (binôme de Newton).

$=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k \geq 0 \geq \binom{n}{1}a = na \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ par le théorème de comparaison.

* si $q=0$, $u_n=0$, $n\geq 1$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Si $-1<q<1$ et $q\neq 0$.

$\left|\frac{1}{u_n}\right|=\left|\frac{1}{q^n}\right|=\left(\frac{1}{|q|}\right)^n$ $\quad 0<|q|<1$.

$\Rightarrow \frac{1}{|q|}>1$. Donc d'après ②, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{|q|}\right)^n=+\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{|u_n|}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

① plus tard.

Corollaire : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\forall n\geq 0$, $u_n\neq 0$.

Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

$u_n = \frac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{(n)!}} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

D'après le corollaire

Preuve du corollaire.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, en utilisant la def de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, on a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{1}{2}$

D'où $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|$ Mq $|u_n| \leq \frac{1}{2}^{n-n_0} |u_{n_0}|$ (Récur).

Initialisat° pour $n = n_0$. $|u_{n_0}| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_{n_0}|$

Donc vrai au rang $n = n_0$.

Hérédité: On suppose $|u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}|$ pour un certain entier $n \geq n_0$. Mq $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}^{n+1-n_0} |u_{n_0}|$

On a $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}| \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} |u_{n_0}|$

Conclusion: On a $\forall n \geq n_0$ $|u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}|$

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Croissances comparées.

Théorème : Si $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$

Alors : (1). $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$

(2) : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.

(3) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)^\beta}{a^n} = 0$.

Théorèmes généraux, convergence

Théorème de la convergence monotone

(•) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

décroissante minorée.

preuve (•) $A = \{u_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ A majorée.

Donc $M = \sup(A)$. Mq $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} M$

Si on prend un $\varepsilon > 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $M - \varepsilon < u_N$

Pour $n \geq N$, on a $M - \varepsilon < u_N \leq u_n$ par croissance de (u_n).

Donc $M - \varepsilon < u_N < u_n \leq M < M + \varepsilon$.

Donc $n \geq N \Rightarrow |u_n - M| < \varepsilon$ D'où $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} M$