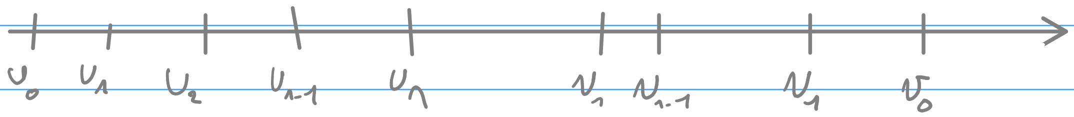
CM 6 : Maths.

* Suites adjacentes

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On dit qu'elles sont adjacentes si :

(i) L'une est croissante et l'autre est décroissante
(ii) $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.



***Théorème :** Deux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont la m̂ limite.

***Preuve :** On peut supposer que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Mq $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n < v_n$.

Supposons par l'absurde que : $\exists N\in\mathbb{N},\ u_N > v_N$

La suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

$\hookrightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} \geq u_n$

$v_{n+1} \leq v_n \Rightarrow -v_{n+1} \geq -v_n$

$\Rightarrow u_{n+1} - v_{n+1} \geq u_n - v_n$.

Donc, $\forall n \geq N$, $u_n - v_n \geq u_N - v_N$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n - v_n \geq \lim_{n\to+\infty} u_N - v_N$

$\Rightarrow 0 \geq u_N - v_N \Rightarrow v_N \geq u_N$. Contradiction.
Donc $u_N > v_N$.

* Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et elle est majorée par v_0.

Donc par le théorème de la convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et elle est minorée par u_0
Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_2.

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = l_1 - l_2 = 0$ (suites adjacentes)
$\Rightarrow l_1 = l_2$.

$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$; $v_n = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$ $\Rightarrow$ Suites adjacentes.

* Suites extraites

* Définit° : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle sous-suite ou suite extraite toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ st $\nearrow$.

① (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{n^2}) sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5$$

② $u = (1; -1; 2; 5; 7; 9)$

$$u_1 \quad u_0 \quad u_5 \quad u_2 \quad u_4$$

$(-1; 1; 9; 2; 7)$ n'est pas une suite extraite !

*Remarque : Si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ st $\nearrow$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$.

En particulier : $\varphi \underset{n \to +\infty}{\longmapsto} +\infty$

Initialisat° : $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ et $\varphi(0) \geqslant 0$

Hérédité : On suppose $\varphi(n) \geqslant n$ pour n quelconque.

On a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ par croissance stricte

Donc $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n. \Rightarrow \varphi(n+1) \geqslant n$

Comme $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, on déduit que $\varphi(n+1) \geqslant n+1$.

*Proposition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l.
alors toutes les suites extraites convergent vers l.

Preuve : par déf. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$. Donc $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

La proposit° est vraie aussi pour $l = \pm\infty$

*Retour aux suites géom.

①. $u_n = q^n$, $q \leqslant -1$

$\underline{q = -1}$ $\quad u_n = (-1)^n$

$u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1.$

Donc u_n ne converge pas.

$\underline{q < -1}$:

$u_{2n} = q^{2n} = (q^2)^n$ et $q^2 > 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = +\infty$ donc u_n ne converge pas.

$u_{2n+1} = q\, u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ car $q < -1$.

* Rappelons : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

* Théorème de Bolzano-Weierstrass

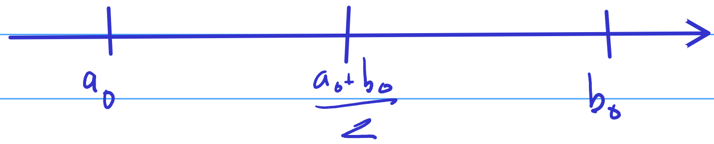
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

* Preuve : Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on sait qu'il existe deux réels a et b tel que $\forall n \geq 0$

$a \leq u_n \leq b.$

Idée : On va construire 2 suites adjacentes (a_n) et (b_n) et une sous suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

On donne : $a_0 = a$, $b_0 = b$, $\varphi(0) = 0$.



Au moins un des deux intervalles $[a_0 ; \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2} ; b_0]$ qui contient une infinité de termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Supposons que ce soit $[a_0 ; \frac{a+b}{2}]$.

on pose $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$ et on choisit $\varphi(1)$ tel que $\varphi(1) > \varphi(0)$

$a_1 \leqslant u_{\varphi(1)} \leqslant b_1$

$a_0 \leqslant a_1$; $b_1 \leqslant b_0$. $\Longrightarrow$ Puis la récurrence.

On obtient par récurrence une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tq $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$.

et $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ (par dichotomie), or $\frac{b-a}{2^n}$ tend vers 0 donc

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite ℓ. Donc par le th des gendarmes, $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

III. Les nombres complexes.

* La forme algébrique d'un complexe

$x^2+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

⇝ Motive l'introduct° de $\mathbb{C}$.

L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres de la forme $a+ib$, $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et i est un nombre "imaginaire"

On munit $\mathbb{C}$ de deux opérations : $z=a+ib$, $z'=a'+ib'$

$z+z' = a+a'+i(b+b')$

$zz' = aa'-bb'+i(ab'+a'b)$

$$\Rightarrow i^2 = (0+1i)(0+1i)$$
$$= 0-1+i(0\times1+1\times0) = -1.$$

⚠ On ne peut pas comparer des nombres complexes.