CM7 : Maths.

$z_1 = (2+5i)(3-2i) + 7 + 10i$

$= 6 - 4i + 15i + 10 + 7 + 10i$

$= 23 + 21i$.

Vocabulaire

Si $z = a + ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}$. $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$.

Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, alors z est un imaginaire pur.

Proposition :

a) $z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \Rightarrow \exists! z' \in \mathbb{C}$ tq $zz' = 1$. z' s'appelle l'inverse de z, noté $\frac{1}{z}$

b) Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors $z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$

Preuve de b)

On suppose $z_1 z_2 = 0$ et $z_1 \neq 0$. Montrons $z_2 = 0$

Comme $z_1 \neq 0$, $\frac{1}{z_1}$ existe. Donc $\frac{1}{\cancel{z_1}} \cancel{z_1} z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = 0$

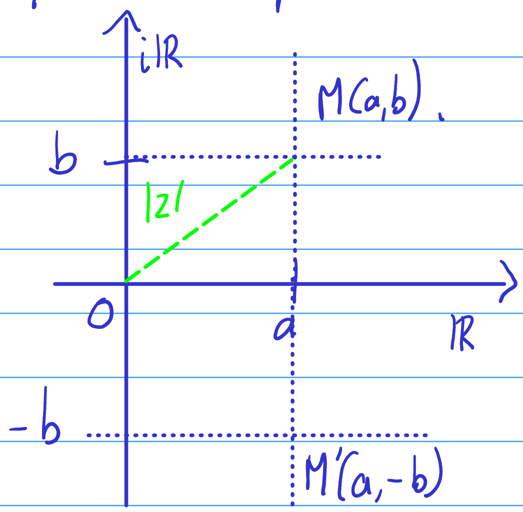
* Module et conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Le conjugué $\bar{z}$ de z est $\bar{z} = a - ib$.

On appelle module de z, noté $|z|$ et défini par :

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$



z est l'affixe de M et
$\bar{z}$ est l'affixe de M'

$|z|$ est la distance OM

Théorème : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = |z|^2$

Preuve $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$

Exemple de calcul d'un inverse

Soit $z = 3+5i$. On cherche $z' \in \mathbb{C}$, $zz' = 1$.

$$z' = \frac{1}{3+5i} = \frac{3-5i}{(3+5i)(3-5i)} = \frac{3-5i}{34} = \frac{3}{34} - \frac{5}{34}i = \frac{3}{34} - \frac{5}{34}i.$$

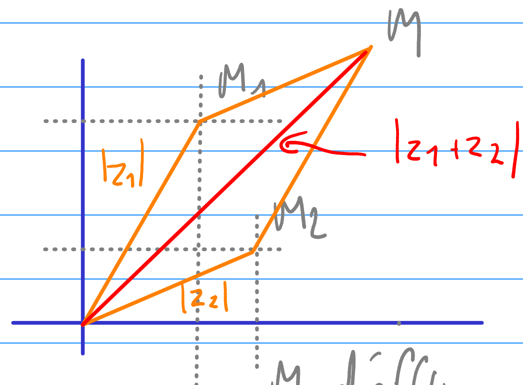
Avec l'inverse, on peut définir la division.

$z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}^*$. $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}$.

$$z = \frac{5-i}{3+2i}$$

$$z = \frac{(5-i)(3-2i)}{3^2+2^2} = \frac{15-10i-3i-2}{13} = \frac{13}{13} - \frac{13}{13}i = 1-i$$

Pour $(z, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$,



M_1 d'affixe z_1
M_2 d'affixe z_2
M d'affixe z_1+z_2

a) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

b) si $|z|=1$ alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$

c) $|z|=0 \iff z=0$

d) $z_2 \neq 0$ alors $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

e) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (inégalité triangulaire).

f) $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$

g) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

h) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

i) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

j) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

k). $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$. $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

Racine carrée et équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

***Théorème:** Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$. L'équation $z^2 = \omega$ admet exactement 2 solutions z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$ qu'on appelle les racines carrés de ω.

***Remarque** Si z_1 est une racine carré de ω, alors $z_2 = -z_1$ est l'autre racine carrée.

preuve (admis)

* Soit $\omega = 1-i$. On veut résoudre $z^2 = \omega$

On écrit $z = a+ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}$

$$z^2 = 1-i \iff (a+ib)^2 = 1-i \iff a^2 - b^2 + 2iab = 1-i$$

$$\iff Re(z^2) = Re(1-i),\ Im(z^2) = Im(1-i)$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = -1 \end{cases}$$

Astuce : on rajoute une équation ! $|z^2| = |1-i|$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 & (l_1) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} & (l_2) \\ 2ab = -1 & (l_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 & (l_1) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} & (l_2) \\ 2ab = -1 & (l_3) \\ a^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} & (l_1+l_2) \end{cases} \qquad \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 & (l_1) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} & (l_2) \\ 2ab = -1 & (l_3) \\ b^2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} & (l_1-l_2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; $b = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$

comme on a $2ab < 0$, a et b sont de signe différents.

Donc, $z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$

$z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$

* Si $\omega \in \mathbb{R}_-^*$

$\boxed{z^2 = \omega, \quad z = \pm i\sqrt{-\omega}}$

*** Théorème** : Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

(E) : $az^2 + bz + c = 0$ possède exactement deux solutions éventuellement confondues, z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$.

Si $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ est une racine carrée de Δ

$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$, $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$

⚠ On n'écrit pas $\delta = \cancel{\sqrt{\Delta}}$! car $\Delta \in \mathbb{C}$.

*** Preuve**

Soit (E) : az^2+bz+c $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

$az^2+bz+c = a\left(z^2 + \frac{b}{a} \cdot z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{c}{a}\right)$

$$= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

Or, $\delta^2 = b^2 - 4ac$.

$$= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) = a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b-\delta}{2a}$$