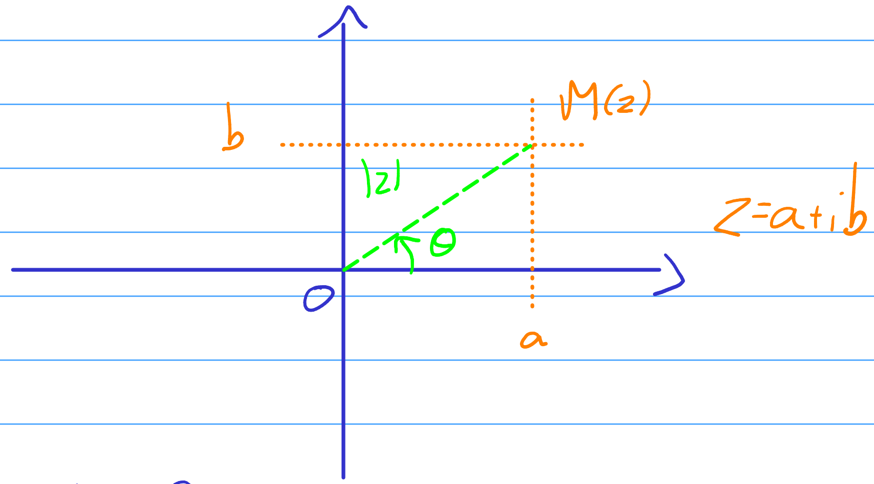
CM8 : Maths

forme trigo d'un nombre complexe.



$\theta = \arg(z)$, Si θ_0 est un arg de z, alors $\theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

On écrit $\arg(z) \equiv \theta_0 \; [2\pi]$

$\cos(\theta) = \dfrac{Re(z)}{|z|}$; $\sin\theta = \dfrac{Im(z)}{|z|}$

$a = |z|\cos\theta$, $b = |z|\sin\theta$

$\Rightarrow z = a + ib = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. $\Rightarrow$ repr trigo de z.

Si $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, on a immédiatement que $Re(z) = |z|\cos\theta$
$Im(z) = |z|\sin\theta$.

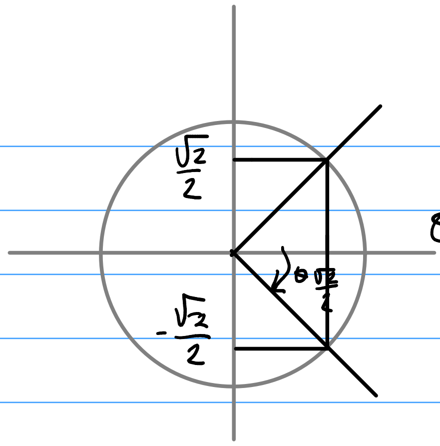
comment passer de la forme algébrique à la forme trigo ?

$z = 1 - i$. $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$z = 1 - i = |z|\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

On veut alors $\theta \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$\theta = -\frac{\pi}{4}$,

$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

L'argument d'un nombre complexe vérifie les propriétés suivantes

① $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \; [2\pi]$

② $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \quad [2\pi]$

③ $\arg(\bar{z}) \equiv \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \; [2\pi]$.

Preuve de ①.

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$zz' = |zz'|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$= |zz'|(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta')$

$= |zz'|(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'))$

$= |zz'|(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$

Rappel :

On a

(a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

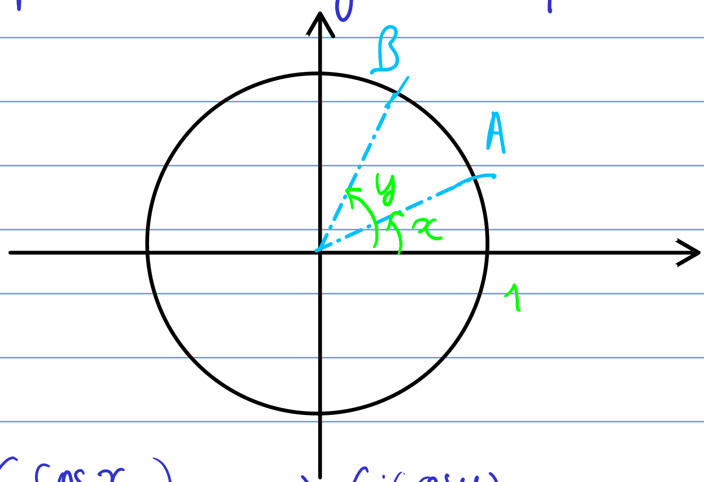
(b) $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$.

On admet (a) et (b) pour le moment.

$\Rightarrow \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \; [2\pi]$.

(2) Récurrence.

On va prouver (a). géométriquement.



$\vec{OA}\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$, $\vec{OB}\begin{pmatrix}\cos y\\ \sin y\end{pmatrix}$

$\vec{OA}.\vec{OB} = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

$\vec{OA}.\vec{OB} = \|\vec{OA}\| . \|\vec{OB}\| . \cos(\vec{OA};\vec{OB}) = \cos(y-x)$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

on substitue par $-y$.

$\cos(x-(-y)) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y)$

$= \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

*** Théorème : Formule de Moivre**

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Preuve pour $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

On a $|z| = 1$

$z^n = |z|^n(\cos(\arg(z^n)) + i\sin(\arg(z^n)))$

$= 1(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ car $\arg(z) \equiv n\arg(z) [2\pi]$

$\equiv n\theta [2\pi]$.

Notation on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. $\theta \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}^*, z = \rho e^{i\theta}, \rho = |z| > 0, \theta = \arg(z)$.

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} + \cancel{i}\,\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2\cancel{i}}$$

$$= \frac{e^{i\theta}\cancel{+e^{-i\theta}} + e^{i\theta}\cancel{-e^{-i\theta}}}{2} = \frac{\cancel{2}e^{i\theta}}{\cancel{2}} = e^{i\theta}$$

Remarquons que si $z = \rho e^{i\theta}$, $z' = \rho' e^{i\theta'}$

1. $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
2. $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$
3. $z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$.
4. $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

Formules d'Euler

Preuve

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (1)

$e^{-i\theta} = \cos -\theta + i\sin -\theta = \cos\theta - i\sin\theta$ (2)

$(1)+(2) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \iff \boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$

$(1)-(2) = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \iff \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$

Retour sur la racine carrée

$\omega = 1 - i$

On a calculé sa racine dans le CM7.

$\tilde{z}_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $\tilde{z}_2 = -\tilde{z}_1$

Deuxième méthode qui utilise la f trigo

On écrit $1-i$ sous f trigo.

$\omega = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (vu + haut)

On cherche une racine carrée $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$z^2 = \omega \iff \rho^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = \sqrt{2} \\ 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\rho = 2^{\frac{1}{4}}$ car $\rho > 0$.

$\theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$z_0 = 2^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\pi}{8}}$, $z_1 = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{7\pi}{8}} = -z_0$.

$Re(z_0) = 2^{\frac{1}{4}} \cos\frac{\pi}{8} > 0$

donc $z_0 = \tilde{z}_1$

$\Rightarrow 2^{\frac{1}{4}} \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

*Racine n-ième

Définition: si $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

une racine n-ième de ω est un nombre complexe z tq $z^n = \omega$

Si $\omega = 1$, on parle de racine n-ièmes de l'unité.

***Théorème** si $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Il y a exactement n racines n-ièmes, données par

$z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ $\quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Preuve

On cherche $z = Re^{i\alpha}$, $R > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$z^n = R^n e^{in\alpha} = \rho e^{i\theta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} R^n = \rho \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = \rho^{\frac{1}{n}} \\ \alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$