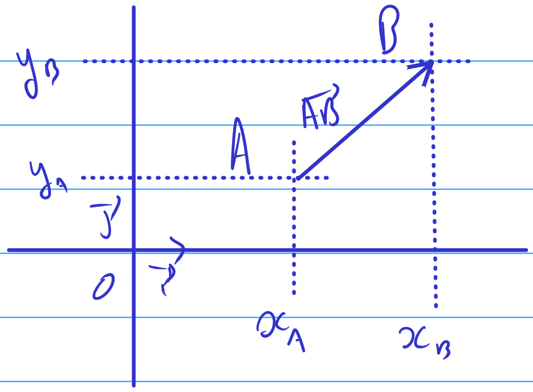
CMX : Maths

* Nombres complexes et géom



$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\qquad z_{\vec{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$

$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |z_{\vec{AB}}|$

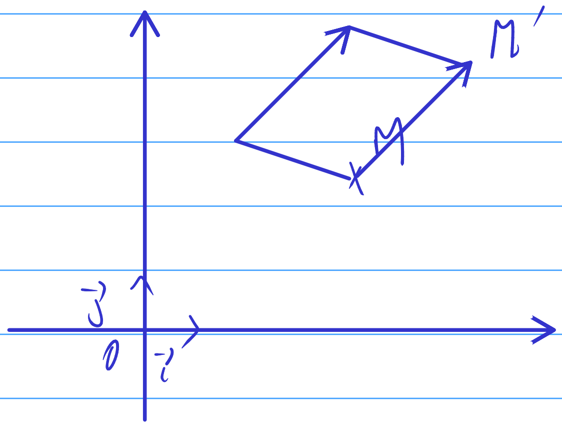
$AB = |z_B - z_A|$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixe z et z' :

alors $\theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arg\left(\frac{z}{z'}\right) [2\pi]$

$(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = \arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right)$

Quelques transformations géométriques



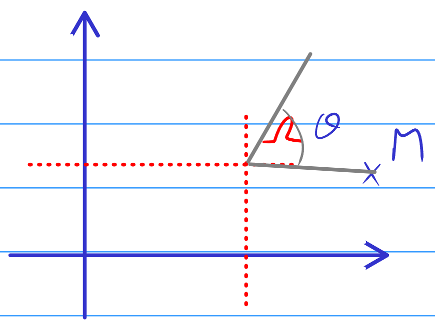
translation de vecteur
$\vec{u}$ d'affixe z_0

Soit z l'affixe de M
z' l'affixe de M'
$t_{\vec{u}}$ la translat° de vecteur $\vec{u}$

$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' - z = z_0 \Leftrightarrow z' = z + z_0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $M = (-1;2)$ $\Rightarrow z' = -1+2i+2+3i = 5i+1$ $M'(1,5)$

* Rotation de centre Ω, d'affixe ω et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$



$M' = Rot_{\Omega,\theta}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} (\widehat{\Omega M'; \Omega M}) = \theta \\ \Omega M = \Omega M' \end{cases}$

$M, M' \neq \Omega$

$$(\widehat{\vec{\Omega M'};\vec{\Omega M}}) = \theta\,[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta\,[2\pi]$$

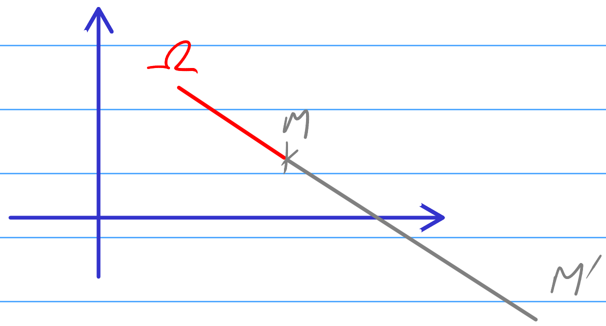
$$\Omega M = \Omega M' \Leftrightarrow |z-\omega| = |z'-\omega| \Leftrightarrow \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1$$

$$M' = Rot_{\Omega,\theta}(M) \Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$$

Si $\Omega = (0;0)$, alors $\omega = 0$ et on obtient :

$$z' = e^{i\theta} \times z$$

* Homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport $k \in \mathbb{R}$



$H_{\Omega,k}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k

$$M' = H_{\Omega,k}(M) \Leftrightarrow \vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M}$$
$$\Leftrightarrow z'-\omega = k(z-\omega)$$
$$\Leftrightarrow z' = \omega + k(z-\omega)$$

<u>Lieu de points.</u>

Soient A, B deux points du plan, $k \in \mathbb{R}_+^*$,

L'ensemble des points M dans le plan tq $\frac{MA}{MB} = k$

* La médiatrice du segment $[A;B]$ si $K=1$
* Un cercle sinon.

Chapitre 4 : Polynômes / Fract° rationnelles

Dans le chapitre, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On appelle polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ une expression du type :
$$P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2\dots+a_nX^n,\ a_n\in\mathbb{K} \text{ et } n\in\mathbb{N}$$

Le degré de P est le plus grand entier $n\in\mathbb{N}$, tel que $a_n\neq 0$.

$P(X)=1+3X+X^4+5X^6$ $\deg(P)=6$
$Q(X)=2$, $\deg(Q)=0$
$R(X)=0$ $\deg(R)=-\infty$ (convention).

Notat° :

$\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coeff dans $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coeff dans $\mathbb{K}$. et degré $\leqslant N$

Opérat° sur les polynômes

Soit $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, $Q(X)=\sum_{k=0}^{n}b_kX^k$

$P(X)+Q(X)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^n$.

$\cdot \lambda \in \mathbb{K}, \lambda P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$

$P(X) Q(X) = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k, \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$

$P(X) = 1 + 2X + X^2$
$Q(X) = 2 - 2X + 3X^2 + 4X^4$

$2P(X) + Q(X) = 2 + 4X + 2X^2 + 2 - 2X + 3X^2 + 4X^4$
$= 4 + 2X + 5X^2 + 4X^4$

$P(X)Q(X) = (1 + 2X + X^2)(2 - 2X + 3X^2 + 4X^4)$

$= 2 - 2X + 3X^2 + 4X^4 + 4X - 4X^2 + 6X^3 + 8X^5 + 2X^2 - 2X^3 + 3X^4 + 4X^6$
$= 2 + 2X + X^2 + 4X^3 + 7X^4 + 8X^5 + 4X^6.$

$P(X)Q(X) = 2 + 2X$
$a_0 b_0; \quad a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \quad \ldots$

Remarque :

① $\cdot \deg(P+Q) \leq \max(\deg P; \deg Q)$

$\cdot \deg(P+Q) = \max(\deg P; \deg Q) \Leftrightarrow \begin{cases} \deg(P) \neq \deg(Q) \text{ ou} \\ \deg P = \deg Q \text{ et } a_n \neq b_n \end{cases}$
où a_n et b_n sont les coeff dominants.

② $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

③ $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \deg(\lambda P) = \deg(P)$.

Théorème de la division euclidienne

quotient Reste.

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$, $\exists ! (Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tq :

$A(X) = B(X)\,Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

$A(X) = X^4 + 2X^2 + X - 1$

$B(X) = X^2 - X + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 + 2X^2 + X - 1 & X^2 - X + 1 \\
\hline
X^4 - X^3 + X^2 & X^2 + X + 2 \\
\hline
+X^3 + X^2 + X - 1 & \\
-X^3 - X^2 + X & \\
\hline
2X^2 - 1 & \\
-2X^2 - 2X + 2 & \\
\hline
2X + 3 & \\
\end{array}
$$