

DEVOIR SURVEILLÉ 1

9 NOVEMBRE 2023– DURÉE : 3 HEURES

Les documents ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont interdites, les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Le sujet comporte 6 exercices indépendants qui pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

Veuillez s'il vous plait indiquer votre numéro de groupe sur votre copie.

Exercice 1. On considère la suite de réels définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq u_n \leq 2$.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- En déduire que la suite est convergente et si ℓ est sa limite, justifier que $\ell = \sqrt{2 + \ell}$.
- En déduire la valeur de ℓ .
- Soit

$$A = \{-5\} \cup \{0\} \cup \{u_n : n \geq 0\}.$$

Déterminer la borne supérieure et inférieure de A . On justifiera.

Exercice 2. On considère les suites définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}, \quad n \geq 1.$$

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
- Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
- Montrer que les deux suites sont adjacentes.
- Que peut-on en conclure ?

Exercice 3. Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

- Calculer le module et un argument de z_1 et z_2 .
- En déduire le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 4. Soit $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Trouver les racines carrées de z_0 .
- En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$.

Indication : on pourra développer $(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}))^2$.

Exercice 5. Soit $P(X) = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$.

- a) Montrer que le nombre complexe i est une racine double de P .
- b) Que peut-on dire de $-i$?
- c) En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6. On considère les deux fractions rationnelles définies par

$$F_1(X) = \frac{(X-1)^3}{X^2-4}, \quad \text{et} \quad F_2(X) = \frac{X^2+1}{(X^2-1)(X^2+X+1)}.$$

- a) Décomposer en éléments simples $F_1(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.
- b) Décomposer en éléments simples $F_2(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.