

Td1: Maths.

$(\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow \text{corps.}$

Commutatif: $a+b = b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$.

Associatif: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Élément neutre: $a+0 = a$, $a \cdot 1 = a$

Inverse: $a+(-a) = 0$, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$; $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, corps.

$\mathbb{R}$ a un ordre:

$$a^2 \geq 0 \quad , \quad a \geq b \Leftrightarrow a-b \geq 0 \Leftrightarrow \exists c \text{ tq } a-b = c^2$$

Exercice 1.2. Soient f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2-1$.

(1) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

(2) A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

$$\begin{aligned} 1. (*) \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2-1) = 3(x^2-1)+1 = 3x^2-2 \\ (**) \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(3x+1) = (3x+1)^2-1 = 9x^2+6x. \end{aligned}$$

2. Non, $f \circ g \neq g \circ f$, car $3x^2-2 \neq 9x^2+6x$.

Soit I un intervalle et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

$$f(I) := \{f(x), x \in I\} \quad f^{-1}(I) := \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in I\}$$

$$I = [0;1]. \quad f(I) = [1;4].$$

* Image / Pré-image.



alles gut

$$g(x) = x^2 - 1.$$

$$g([0;1]) = [-1;0]$$

$$g^{-1}([8;15]).$$

$\Leftrightarrow$

$$8 \leq x^2 - 1 \leq 15 \Leftrightarrow 9 \leq x^2 \leq 16$$

d'une part: $x \leq 3$ ou $x \geq -3$.

d'autre part: $x \leq 4$ ou $x \geq -4$

$$\text{Donc } g^{-1}([8;15]) = [-4; -3] \cup [3; 4].$$

Exercice 1.3. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 + 1$. En partant du graphe de $x \mapsto x^2$, tracer le graphe de f et déterminer les ensembles suivants :

(1) $f([-3, -1])$;

(2) $f([-2, 1])$;

(3) $f([-3, -1] \cup [-2, 1])$;

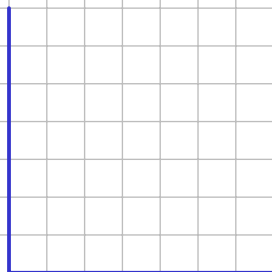
(4) $f([-3, -1] \cap [-2, 1])$;

(5) $f^{-1}(]-\infty, 2])$;

(6) $f^{-1}([1, +\infty[)$;

(7) $f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[)$;

(8) $f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[)$.



$$f(x) = x^2 + 1$$

$$(1) f([-3; -1]) = [2; 10]$$

$$(2) f([-2; 1]) = [2; 5]$$

$$(3) f([-3; -1] \cup [-2; 1]) = f([-3; 1]) = [2; 10]$$

$$(4) f([-3; -1] \cap [-2; 1]) = f([-2; -1]) = [2; 5]$$

$$(5) f^{-1}([-\infty; 2]) = [-1; 1]$$

$$(6) f^{-1}([1; +\infty]) = \mathbb{R}$$

$$x^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$$

$$(7) f^{-1}([-\infty; 2] \cup [1; +\infty]) = f^{-1}(\mathbb{R}) =$$

$$(8) f^{-1}([-\infty; 2] \cap [1; +\infty]) = f^{-1}([1; 2]) = [2; 5]$$

$$(1) f_1 : \begin{matrix} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n \end{matrix} ; \begin{matrix} i \\ \times 5 \end{matrix} \quad (2) f_2 : \begin{matrix} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & -n \end{matrix} ; \begin{matrix} i \\ s \end{matrix}$$

$$(3) f_3 : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{matrix} ; \begin{matrix} i \\ \times 1 \\ \times 5 \end{matrix} \quad (4) f_4 : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{matrix} ; \begin{matrix} i \\ \times 1 \\ s \end{matrix}$$

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$\times$ injectif
 $\vee$ surjectif

$$f(x) = x^2$$

$$f: \mathbb{R} \mapsto [0; +\infty[\subset f: [0; +\infty[\mapsto [0; +\infty[$$

$\times$ inj
surj $\mapsto$ bijectif

Exercice 1.7. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$(1) f_1 : \begin{matrix} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n + 1 \end{matrix} ;$$

$$(2) f_2 : \begin{matrix} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n + 1 \end{matrix} ;$$

$$(3) f_3 : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{matrix} ;$$

$$(4) f_4 : \begin{matrix} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{x-1} \end{matrix} .$$

(1) Injectif, $\neq$ surjectif (2) bijection

(3) Injective. Il faut résoudre : $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$ surjectif. $\checkmark$

$$(4) f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

pas surjective mais injective

$$\frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = y(x-1) = yx - y$$

$$x+1 - yx = -y$$

$$x(1-y) = -y-1$$

$$x = -\frac{y+1}{1-y}, y \neq 1.$$

$f: A \mapsto B$ est bijective si $\forall b \in B \exists! a \in A, f(a) = b$.

si $f: N^* \mapsto N^*$ est une bijection, alors elle est une permutation

Si $f: A \mapsto B$ est bijective, alors f^{-1} existe.

Si f^{-1} existe, alors f est bijective.

$$f \circ f^{-1} = id_B$$

$$f^{-1} \circ f = id_A$$

} Si deux applicat^{ns} sont injectives.

Exercice 1.8. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

(1) f est-elle injective? surjective?

(2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

(3) Montrer que la restriction $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto g(x) = f(x)$ est une bijection.

(4) En anticipant sur les chapitres 8 et 9, retrouver ce résultat en étudiant les variations de f .

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} \Leftrightarrow 2x(1+y^2) = 2y(1+x^2)$$

$$\Leftrightarrow x + xy^2 = y + yx^2$$

$$x + yx^2 = y + xy^2$$

$$x(1+xy) = y(1+xy)$$

} truc qui va pas

$$\frac{2x}{1+x^2} = y$$

$$2x - y(1+x^2) = 0$$

$$yx^2 - 2x + y = 0$$

$$\Delta = 4(1-y^2) \parallel 1-y^2 \geq 0, -1 \leq y \leq 1.$$

$$g: [-1;1] \mapsto [-1;1]$$

$$x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

(3). Si $-1 < y < 1$, alors l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$ a une unique solution $x \in [-1;1]$. (à montrer).

Soit $y \in [-1;1]$.

Les solutions de l'équation sont :

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\left(\frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \right)^2 \leq 1$$

$$= 2 - 2\sqrt{1-y^2} - y^2 \leq y^2$$

$$2 - 2\sqrt{1-y^2} - 2y^2 \leq 0$$

$$1 - \sqrt{1-y^2} - y^2 \leq 0$$

$$1 - y^2 - \sqrt{1-y^2} \leq 0 \quad z = 1 - y^2$$

$$z - \sqrt{z} \leq 0$$

$$z \leq \sqrt{z} \text{ vrai si } 0 < z < 1.$$

$$0 < 1 - y^2 < 1$$