

TD 11: Maths

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta} = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$$

Exercice 3.2. Mettre sous la forme algébrique $a + ib$ les complexes suivants :

$$\frac{3+6i}{3-4i}, \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}, \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9+12i+18i-24}{9+16} = \frac{30-12i}{25} = \frac{6-3i}{5}$$

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{(1+i)^2}{(2-i)^2} = \frac{1+2i-1}{4-4i+1} = \frac{2i}{5-4i} = \frac{2i(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)} = \frac{10i-8}{41} = \frac{-8+10i}{41}$$

Exercice 3.3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $|1+iz| = |1-iz|$, montrer que z est un réel.

$$|1+iz| = |1-iz| \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0.$$

$$z = a+ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$|1+iz| = |1-iz|$$

$$||1+iz|| = ||1-iz||$$

$$|i-z| = |z-i| \Rightarrow z \text{ est sur la bissectrice du segment } [-i; i] \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$|1+iz|^2 = |1-iz|^2 \Leftrightarrow (1-iz)(1+i\bar{z}) = (1+iz)(1-i\bar{z})$$

$$\cancel{1} + i\bar{z} - iz + \cancel{z\bar{z}} = \cancel{1} - i\bar{z} + iz + \cancel{z\bar{z}}$$

$$\cancel{i}(\bar{z}-z) = \cancel{-i}(\bar{z}-z) \Rightarrow z\bar{z} = \bar{z}z \Rightarrow z = \bar{z}.$$

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right)$$

$$a\left[\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = 0 \Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$\sqrt{\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z \in \mathbb{C} \quad p e^{i\varphi} = R e^{i\alpha} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = R^2 \\ \varphi = \frac{\alpha}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sqrt{i} \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ or } -e^{i\frac{\pi}{4}}; \quad e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{R e^{i\alpha}} = \begin{cases} \sqrt{R} e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ -\sqrt{R} e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$(x+iy)^2 = a+ib \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a+ib$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (I) \\ 2xy = b & (II) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (III) \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}; \quad x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

$$x^2 = a - \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

si $b \geq 0$.

$$\sqrt{a+ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right)$$

si $b < 0$

$$\sqrt{a+ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \right)$$

$i = 0+1i$ 1) 0 donc

$$\pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + i \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ ok.}$$

Exercice 3.6. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

(1) $3-4i$, (2) 1 , i , $3+4i$, $8-6i$, $7+24i$.

Racine de $3-4i$: $(z')^2 = 3-4i$

(1) $z' = \pm \left(\sqrt{\frac{3+5}{2}} - i \sqrt{\frac{5-3}{2}} \right) = \pm \left(\frac{2\sqrt{5}}{2} - i \right)$

2. $z' = \pm \left(\sqrt{\frac{1+1}{2}} + i \sqrt{\frac{-1+1}{2}} \right) = \pm 1 \text{ ok,}$

3. $z' = \pm \left(\frac{2\sqrt{5}}{2} + i \right)$

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}} = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} \quad \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{-\frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}}$$

Exercice 2.29. Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ non vides telles que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a $a \leq b$. Montrer que A est majorée, B est minorée et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Soit $a \in A$ et $b \in B$. On a $a \leq b$.

Donc $\forall b \in B, \forall a \in A, a \leq b$ Donc $a \leq \inf(B)$ car $\inf(B) \in B$.
 b est minoré par tout élément de A , donc $\sup(A) \leq b$

$a \leq b \Rightarrow a \leq \sup(A) \leq \inf(B) \leq b$. ok.

Exercice 2.31.

(1) Soient a et b deux réels. Montrer que

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \quad \text{et} \quad \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

(2) En déduire que si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes, alors les deux suites $(\max(u_n, v_n))$ et $(\min(u_n, v_n))$ sont convergentes. La réciproque est-elle vraie?

$$\text{Si } a \leq b. \Rightarrow (a - b) \leq 0$$

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - a + b) = \frac{1}{2} \cdot 2b \quad \text{ok.}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow \forall \varepsilon_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| < \varepsilon$$

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow \forall \varepsilon_2 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l_2| < \varepsilon$$

$$(\max(u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = \max(N_1, N_2), n \geq N \\ \Rightarrow |(\max(u_n, v_n)) - \max(l_1, l_2)| < \varepsilon$$

Exercice 2.32. *Théorème de Césaro et application.*

- (1) Soit (u_n) une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ , alors la suite (U_n) converge aussi vers ℓ .
- (2) Montrer que le résultat reste vrai si $\ell = +\infty$ ou $-\infty$.
- (3) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, avec $\ell \in [0, +\infty]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.
- (4) En appliquant la question précédente avec $u_n = \frac{n!}{n^n}$, en déduire que

$$\sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{e}.$$