

TD 13: Maths.

Exercice 3.10. Calculer le module et l'argument de $(1+i)^n$. En déduire les valeurs des sommes $S_1 = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$ et $S_2 = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots$.

$$1+i, \quad R=\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(1+i)^n = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k = 1 + i \binom{n}{1} - \binom{n}{2} - i \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \dots$$

$$\operatorname{Re}((1+i)^n) = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots = \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\operatorname{Im}((1+i)^n) = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots = \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Exercice 4.1. Effectuer la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B dans les cas suivants :

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------|-----------------------|
| 1. $A = X^4 + 2X^3 - X + 6,$ | $B = X^3 - 6X^2 + X + 4,$ | dans $\mathbb{R}[X].$ |
| 2. $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4,$ | $B = X^2 - 1,$ | dans $\mathbb{R}[X].$ |
| 3. $A = X^2 - 3iX - 5(1+i),$ | $B = X - 1 + i,$ | dans $\mathbb{C}[X].$ |
| 4. $A = 4X^3 + X^2,$ | $B = X + 1 + i,$ | dans $\mathbb{C}[X].$ |

$$\begin{array}{r}
 2. \quad X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4 \\
 - \quad X^5 + 0X^4 + X^3 \\
 \hline
 \quad -X^4 + 3X^3 \\
 \quad - \quad -X^4 + 0 \\
 \hline
 \quad \quad 0 \quad 3X^3 \\
 \quad \quad \quad 3X^3 + 3X \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0 \quad 3X
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 X^2 - 1 \\
 \hline
 X^3 - X^2 + 3X
 \end{array}$$

$$\Rightarrow X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4 =$$

$$(X^2 - 1)(X^3 - X^2 + 3X) + (3X + 4)$$

$$\begin{array}{r|l}
 X^2 - 3iX - 5(1+i) & X - 1 + i \\
 - X^2 - X + iX & X + 1 - 4i \\
 \hline
 0 + X(1-4i) & \\
 - X(1-4i) - 5(1-i) & \\
 \hline
 -8 - 10i &
 \end{array}$$

Théorème de Viète: $p(a)=0 \Leftrightarrow (X-a)$ divise p .

$(X-a)^k$ divise p si.

$$p(a)=0; p'(a)=0 \dots, p^{(k-1)}(a)=0; p^{(k)}(a) \neq 0$$

Exercice 4.2.

- (1) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ (on distinguera les cas $a=b$ et $a \neq b$).
- (2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P = X^n + X^{n-1} + X + 1$ par $Q = (X-1)^2$.
- (3) Sans effectuer la division euclidienne, prouver que le polynôme A divise le polynôme B dans les cas suivants :
 a) $A = X - i$ et $B = X^3 - 2iX^2 - i$ b) $A = X^2 - 1$ et $B = X^3 + X^2 - X - 1$.
- (4) Déterminer les réels a et b de sorte que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

$$1. P \in \mathbb{K}[X], (a, b) \in \mathbb{K}$$

$$p(X) = (X-a)(X-b)d(X) + R(X)$$

$$\deg(R) \leq 1. \quad R = \alpha X + \beta$$

$$\begin{array}{l}
 p(a) = (a-a)(a-b)d(X) + R(X) \\
 p(b) = (b-a)(b-b)d(X) + R(X)
 \end{array} \quad \parallel a \neq b.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(a) = \alpha a + \beta \\ p(b) = \alpha b + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{p(b) - p(a)}{b - a} \\ \beta = \frac{bp(a) - ap(b)}{b - a} \end{cases}$$

$$R(X) = \left(\frac{p(b) - p(a)}{b - a} \right) X + \frac{bp(a) - ap(b)}{b - a}$$

$$a = b \Rightarrow (X - a)^2 \text{ divise } P.$$

$$\Leftrightarrow P(a) = 0, P'(a) = 0.$$

$$P(a) = (a - a)^2 Q(X) + \alpha a + \beta.$$

$$p'(a) = 2(a - a)Q'(X) + \alpha,$$

$$p'(a) = \alpha, \beta = p(a) - \alpha a \Leftrightarrow \beta p(a) - p'(a)a.$$

$$R(X) = p'(a)X + p(a) - p'(a)a.$$

$$(2) \quad p(X) = X^n + X^{n-1} + X + 1, \quad Q(X) = (X - 1)^2; \quad p'(X) = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + 1$$

$$R(X) = p'(1)X + p(1) - p'(1) \times 1 \Leftrightarrow 2nX + 4 - 2n = 2nX - 2n + 4.$$

$$(4) \text{ Racines de } X^2 - 2 \Rightarrow \pm i\sqrt{2}. \quad P(X) = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2.$$

$$P(i\sqrt{2}) = 0 \text{ et } P(-i\sqrt{2}) = 0.$$

$$\begin{cases} 4 - i2\sqrt{2} - 2a + ib\sqrt{2} + 2 = 0 \\ -4 + i2\sqrt{2} + 2a - ib\sqrt{2} + 2 = 0 \end{cases}$$

$$6 - 2a + i\sqrt{2}(b - 2) = 0 \Rightarrow 6 - 2a = 0 \text{ et } \sqrt{2}(b - 2) = 0. \Rightarrow$$

$$a = 3.$$

$$b = 2.$$

Rééciproquement pour l'autre.

Exercice 4.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $1 - X$ divise $1 - X^{n+1}$ dans $\mathbb{K}[X]$ et donner le quotient de la division euclidienne.

$$P(X) = 1 - X^{n+1} = (1 - X)Q(X). \quad P(1) = 1 - 1^{n+1} = (1 - 1)Q(1) = 0.$$

$$1 - X^{n+1} = (1 - X)Q(X)$$

$$Q(X) = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X}$$

Exercice 4.5. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $A, B \neq 0$. Montrer que si A divise B et B divise A , alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B = \lambda A$.

$$A = B \times Q$$

$$B = A \times Q'$$

$$B = BQQ' \Rightarrow QQ' = 1 \Leftrightarrow Q' = \frac{1}{Q}. \text{ Donc } Q = \lambda. \text{ et } Q' = \frac{1}{\lambda}.$$

Exercice 4.7. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P - XP' = X$?

Indication : Raisonner par l'absurde en supposant qu'un tel polynôme existe. Remarquer alors que $P \neq 0$. Soit $n = \deg(P)$. Justifier que $n \geq 1$ puis examiner le coefficient de X^n dans $P - XP'$ en fonction du coefficient de X^n dans P . Conclure.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P - XP' = X$. $P \neq 0$ car $0 - 0 = X$ absurde.

Soit $n = \deg(P)$. Si $\deg(P') = 0$, alors $P'(X) = 1$, $P - X \cdot 1 = X$
 $P = X(\lambda + 1)$

Donc $\deg(P) = 1$. Si $\deg(P') = -\infty$ alors $P = X$.

Donc $n \geq 1$.

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n.$$

$$P'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + na_nX^{n-1}.$$

$$XP'(X) = a_1X + 2a_2X^2 + 3a_3X^3 + \dots + (n-1)a_{n-1}X^{n-1} + na_nX^n$$

$$\begin{aligned}
 P(X) - XP'(X) &= a_0 + \cancel{a_1 X} + \cancel{a_2 X^2} + \dots + \cancel{a_{n-1} X^{n-1}} + a_n X^n \\
 &\quad - (a_1 X + 2a_2 X^2 + \dots + (n-1)a_{n-1} X^{n-1} + na_n X^n) \\
 &= a_0 + a_2 X^2 + 2a_3 X^3 + \dots + a_{n-1} X^{n-1} (1 - n+1)
 \end{aligned}$$

Exercice 4.11. (1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si $\deg(P) \geq 1$ alors la fonction polynomiale associée est une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

(2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons que $\deg(P)$ est impair. En utilisant le théorème de d'Alembert-Gauss, montrer alors que P a au moins une racine réelle (on retrouvera ce résultat avec une autre méthode; voir exercice 7.15).

1. $P(X)$ surjectif $\Leftrightarrow P(X) = a, P(X) - a = 0$

On pose $Q(X) = P(X) - 1, Q \in \mathbb{C}[X]$.

Or, $Q(X) = 0$ existe toujours dans $\mathbb{C}$

2. $P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) = 2n+1, n \in \mathbb{N}$.

$P(X)$ a exactement $2n+1$ racines dans $\mathbb{C}$

$$\text{Si } P(z) = 0 \Leftrightarrow p(\bar{z}) = 0$$

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

$$\overline{p(X)} = \overline{a_n} \bar{X}^n + \overline{a_{n-1}} \bar{X}^{n-1} + \dots + \overline{a_2} \bar{X}^2 + \overline{a_1} \bar{X} + \overline{a_0}$$

$$= a_n \bar{X}^n + a_{n-1} \bar{X}^{n-1} + a_2 \bar{X}^2 + a_1 \bar{X} + a_0 = p(\bar{X})$$

$$p(z) = 0 \Rightarrow \overline{p(z)} = \bar{0} \Rightarrow p(\bar{z}) = 0$$

Si toutes les racines sont complexes, on pourrait les arranger par paire (car $p(z) = p(\bar{z})$ et $z \neq \bar{z}$ si $z \notin \mathbb{R}$)

Or, on ne peut pas les arranger d'une telle manière (degré impair)

Donc il y a au moins une racine réelle.

Exercice 4.12. On considère deux polynômes $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ vérifiant pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|P(z)| = |Q(z)|.$$

- (1) Montrer que P et Q ont même racines.
- (2) Montrer que si z_0 est une racine de P (et donc de Q), alors la multiplicité est la même.
- (3) En déduire alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tel que $P = \lambda Q$.

$$|P(z)| = |Q(z)|.$$

$$P(z_0) = 0 \text{ssi } Q(z_0) = 0.$$

$$P(z) = (z - z_0)^k T(z)$$

$$Q(z) = (z - z_0)^{k'} S(z)$$

$$|P(z)| = |z - z_0|^k |T(z)|$$

$$|Q(z)| = |z - z_0|^{k'} |S(z)|.$$

$$|z - z_0|^k |T(z)| = |z - z_0|^{k'} |S(z)|. \text{ car } |P(z)| = |Q(z)|.$$

$$\text{Si } k > k',$$

$$T(z_0) \neq 0, S(z_0) = 0$$

$$|z_0 - z_0|^{k-k'} |T(z_0)| = |S(z_0)|. \Rightarrow S(z_0) = 0. \text{ donc pas vrai - Parail pour } k' > k \text{ car } T(z_0) \neq 0.$$

$$\text{Donc } k = k'.$$

Exos :

Exercice 4.6. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- (1) Supposons dans cette question que $\deg(P) \geq 1$. Montrer alors que $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
- (2) Montrer que P est constant si et seulement si $P' = 0$.

④ d'autres !!!



