

(2) Décomposer $P = 2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet une racine réelle.

$$P(X) = 2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i$$

il admet une racine réelle: $\exists \alpha \in \mathbb{R}, P(\alpha) = 0$

$$P(\alpha) = 2\alpha^3 - (5 + 6i)\alpha^2 + 9i\alpha + 1 - 3i = 0$$

$$6i\alpha^2 + 9i\alpha - 3i = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0.$$

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$P(1) \neq 0.$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} - \frac{3}{2}i + \frac{9}{2}i + 1 - 3i$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{5}{4}} + \cancel{\frac{6}{2}i} - \cancel{\frac{6}{2}i} = 0 \quad \text{okay bitch.}$$

$$\Rightarrow P(X) = \left(X - \frac{1}{2}\right) Q(X). \quad = \left(X - \frac{1}{2}\right) (2X^2 - (4 + 6i)X + 2 + 6i).$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 - 5X^2 - 6iX^2 + 9iX + 1 - 3i & X - \frac{1}{2} \\ + (2X^3 + X^2) & 2X^2 - (4 + 6i)X + 2 + 6i \\ \hline = 0X^3 - 4X^2 - 6iX^2 + 9iX + 1 - 3i & \\ + 4X^2 + 6iX^2 - 2X - 6X + 1 - 3i & \\ \hline + 2X + 6iX - 1 + 3i & \end{array}$$

Factoriser $2x^2 - (4+6i)x + 2+6i$

$$\Delta = (4+6i)^2 - 4 \times 2 \times (2+6i)$$

$$= 16 + 2 \times 4 \times 6i - 8 \times 2 - 8 \times 6i$$

$$= 0. \text{ Racine double! oups...}$$

$$z = \frac{4+6i}{4} = 1 + \frac{3}{2}i$$

$$P(X) = 2X^3 - (5+6i)X^2 + 9iX + 1-3i = (X - \frac{1}{2})(X - 1 - 2i)(X - 1 - i)$$

Exercice 4.15. Soit $P = X^8 - 4X^6 + 6X^4 - 4X^2 + 1$.

(1) Montrer que $X^2 - 1$ divise P .

(2) En déduire que 1 et -1 sont des racines de P et déterminer leur multiplicité.

(3) Déterminer la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

$$\begin{array}{r|l} X^8 - 4X^6 + 6X^4 - 4X^2 + 1 & X^2 - 1 \\ -X^8 + X^6 & \\ \hline -3X^6 + 6X^4 & \\ +3X^6 - 3X^4 & \\ \hline -3X^4 + 3X^2 & \\ -3X^4 + 3X^2 & \\ \hline -X^2 + 1 & \\ +X^2 - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$X^8 - 4X^6 + 6X^4 - 4X^2 + 1 = (X^2 - 1)(X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1)$$

$$\Rightarrow (X-1)(X+1)(X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1).$$

$\Rightarrow -1$ et 1 sont racines de P .

$$P'(X) = 8X^7 - 24X^5 + 24X^3 - 8X \quad P'(1) = 0, P'(-1) = 0$$

$$P^{(2)}(X) = 56X^6 - 120X^4 + 72X^2 - 8, \quad P^{(2)}(1) = 0, P^{(2)}(-1) = 0$$

$$P^{(3)}(X) = 336X^5 - 480X^3 + 144X, \quad P^{(3)}(1) = 0, P^{(3)}(-1) = 0$$



Donc : $P(X) = (X-1)^4 (X+1)^4$

Exercice 4.16. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions suivantes :

1. $\frac{X^3 + X^2 + 1}{(X+1)^2},$

2. $\frac{X^2 - X - 1}{X^2 - 3X + 2},$

3. $\frac{X^4 + 1}{X(X^2 - 1)},$

4. $\frac{2}{X(X-1)^2},$

5. $\frac{3X^2 - 9X - 3}{(X^2 - X - 2)^2},$

6. $\frac{X+1}{X(X-1)^4}.$

$$\begin{array}{r|l}
 1. & X^3 + X^2 + 1 \\
 & X^2 + 2X + 1 \\
 & \hline
 & X - 1 \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & X + 2
 \end{array}$$

$$X^3 + X + 1 = (X^2 + 2X + 1)(X - 1) + (X + 2) = (X - 1) + \frac{X + 2}{(X + 1)^2}$$

$$\frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} = \frac{a(X+1) + b}{(X+1)^2} = \frac{X+2}{(X+1)^2}$$

$$\Rightarrow aX + a + b = X + 2$$

$$\Rightarrow a = 1.$$

$$\Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow b = 1.$$

$$\frac{X^3 + X + 1}{(X+1)^2} = X - 1 + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}$$

4. $\frac{2}{x(x-1)^2}$ $\deg(2) < \deg(x(x-1)^2)$ $E(x)=0$.

$$\frac{2}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{a}{x} + \frac{b(x-1)+c}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c}{x(x-1)^2}$$

$$2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$a+b=0$$

$$-2a-b+c=0$$

$$a=2 \Rightarrow b=-2$$

$$-4+2=-c \Rightarrow c=2$$

$$\frac{2}{x(x-1)^2} = \frac{2}{x} - \frac{2}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

