

TD 16: Maths.

Exercice 4.17. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions suivantes :

1. $\frac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1},$

2. $\frac{1}{(X^2 + 1)(X^2 + 2)},$

3. $\frac{4X}{(X + 1)(X^2 + 1)^2},$

4. $\frac{X^2 + 2}{X^2(X^2 + 1)^2},$

5. $\frac{4}{(X + 1)^2(X^2 + 1)^2},$

6. $\frac{4}{(X^2 + 1)(X - 1)^4}.$

3. $\frac{4X}{(X+1)(X^2+1)^2} = F(X)$

$$F(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2}.$$

$$a(X^2+1)^2 + (bX+c)(X+1)(X^2+1)^2 + (dX+e)(X+1) = 4X.$$

$$a+b=0$$

$$b+c+d+e=0.$$

$$b+c=0$$

$$a+c+e=0.$$

$$2a+b+c+d=0.$$

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} a = -b \\ c = -b \\ -2b - b + b + d = 0 \\ +2b = -d \end{array} & \begin{array}{l} b - b + 2b + e = 0 \\ 2b = e, = d, \\ -b - b + 2b = 0. \end{array} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -1. \\ b = 1 \\ c = -1. \\ d = 2., e = 2. \end{array} \right.$$

$$F(X) = -\frac{1}{X+1} + \frac{X-1}{X^2+1} + \frac{2X+2}{(X^2+1)^2}.$$

Exercice 4.22.

- (1) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction : $\frac{3}{X(X+1)}$.
- (2) En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction : $\frac{3}{X^3(X^3+1)}$.

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{3}{X(X+1)} &= \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} \Rightarrow \\
 &= \frac{a(X+1) + bX}{X(X+1)} \quad \begin{array}{l} X=0 \Rightarrow a=2. \\ X=-1 \Rightarrow -b=3 \Rightarrow b=-3. \end{array}
 \end{aligned}$$

Exercice 2.32. Théorème de Césaro et application.

- (1) Soit (u_n) une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ , alors la suite (U_n) converge aussi vers ℓ .
- (2) Montrer que le résultat reste vrai si $\ell = +\infty$ ou $-\infty$.
- (3) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, avec $\ell \in [0, +\infty]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.
- (4) En appliquant la question précédente avec $u_n = \frac{n!}{n^n}$, en déduire que

$$\sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{e}.$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \ell \in \mathbb{R}$$

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

$$u_n \text{ converge vers } \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, n > N_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon_1$$

$$U_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^n u_k \right)$$

Puisque chaque terme de $\sum_{k=N}^n u_k$ est ε -près de ℓ , on peut écrire :

$$\sum_{k=N}^n u_k \simeq \sum_{k=N}^n \ell = (n - N + 1) \cdot \ell.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} u_k}{n} + \frac{(n - N + 1) \cdot \ell}{n} = \frac{(n - N + 1)}{n} \cdot \ell = \ell.$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$$

$$\sqrt[n]{v_n} = v_n^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \ln(v_n^{\frac{1}{n}}) =$$

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

$$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln(l) \quad l > 0$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k))$$

$$= \frac{1}{n} (\cancel{\ln(v_2)} - \ln(v_1) + \ln(v_2) - \cancel{\ln(v_2)} + \cancel{\ln(v_3)} + \ln(v_{n-1}) + \ln(v_{n-2}) + \cancel{\ln(v_n)} - \cancel{\ln(v_{n-1})} + \ln(v_{n+1}) - \cancel{\ln(v_n)})$$

$$= \frac{1}{n} (-\ln(v_1) + \ln(v_{n+1})) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_1}\right) = v_{n+1}^{\frac{1}{n}} - v_1^{\frac{1}{n}}$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sqrt[n]{v_{n+1}} - \sqrt[n]{v_1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$$

Exercice 5.1. (1) Déterminer les domaines de définition des fonctions de la variable réelle suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad g(x) = \sqrt{2x - 3}, \quad h(x) = \sqrt{\frac{3x - 1}{x + 2}}, \quad k(x) = \sqrt{x(x^2 - 1)}.$$

(2) Pour les fonctions f , g et h , calculer lorsque c'est possible les images de 2, de -1 et de 7, ainsi que les antécédents de 5, de -3 et de 0.

U_n polynôme est défini sur $\mathbb{R}$.

$f(x)$ est définie quand $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

$$2x - 3 > 0 \quad \mathcal{D}_g = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[.$$

$$\frac{3x - 1}{x + 2} \geq 0 \Rightarrow 3x - 1 \geq 0 \text{ et } x + 2 > 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \text{ et } x > -2.$$

$$\text{ou } 3x - 1 \leq 0 \text{ et } x + 2 < 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \text{ et } x < -2.$$

$$\mathcal{D}_h = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[\cup]-\infty; -2].$$

$$x(x^2-1) \geq 0 \quad x \geq 0 \text{ et } x^2 \geq 1, \quad x \geq 1 \text{ ou } x \geq -1, \\ \text{ou } x \leq 0 \text{ et } x^2 \leq 1, \\ x \leq 1 \text{ ou } x \leq -1,$$

$$\mathcal{D}_k = [1; +\infty[\cup]-\infty; -1].$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = x+1. \quad x+1 \text{ est une extension de } f(x).$$

$$\overline{\frac{3x-1}{x+2}} \xrightarrow{x \geq \frac{1}{3} \text{ ou } x < -2} \Rightarrow \frac{3x-1}{x+2} = 25.$$

$$\Rightarrow 3x-1 = 25x+50.$$

$$\Rightarrow -22x = 51 \Rightarrow x = -\frac{51}{22} < -2 \text{ ok.}$$

