

TD 17: Maths.

* fonct° paire: $f(x) = f(-x)$.

* fonct° impaire: $f(-x) = -f(x)$.

* fonct° périodique: $\exists T > 0, f(x) = f(x+T)$

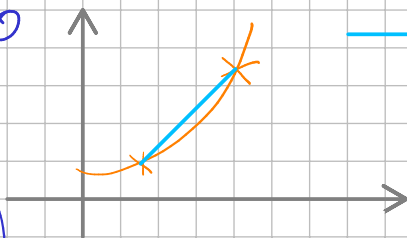
$\sin x$ est périodique de période 2π

$\sin^2 x$ est périodique de période π

$\tan x$ est périodique de période π .

* fonction $\nearrow$: Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$



— au dessus de ✓

* fonct° ^{concave} convexe:

$$(1-t) \begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 \\ f(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)x_1 + tx_2 \\ (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \end{pmatrix} \Rightarrow f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), t \in [0,1].$$

Exercice 5.2. (1) Après avoir précisé le domaine de définition des fonctions suivantes, étudier (le cas échéant) leur parité :

$$f_1(x) = 2x^2 - 1, \quad f_2(x) = x - 3, \quad f_3(x) = \sqrt{x} - 4, \quad f_4(x) = x^3 - 4x.$$

(2) Etudier la périodicité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin(2x), \quad f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right).$$

(1) $f_1(x)$ est une fonction polynomiale, qui est donc définie dans $\mathbb{R}$.

$$2(-x)^2 - 1 = 2x^2 - 1 = f(-x) = f(x). \quad \text{OK. paire.}$$

$f_3(x) = \sqrt{x} - 4$, $\mathcal{D}_{f_3} = [0; +\infty[$, donc ni paire ni impaire.

$$\begin{aligned} (2) \quad f_2(x) &= \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right). \quad f_2(x+T) = \cos\left(\frac{\pi(x+T)}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi T}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi T}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right). \\ \Rightarrow \frac{\pi T}{3} &= 2\pi \Rightarrow T = 6. \end{aligned}$$

$$f_1(x) = \sin(2x)$$

$$f_1(x+T) = \sin(2(x+T)) = \sin(2x+2T) = \sin(2x+2\pi) = \sin(2x)$$

$f_1(x)$ périodique de période $T = \pi$.

Exercice 5.3. Soit $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $x \mapsto E(x)$ où $E(x)$ vaut le plus grand entier inférieur ou égal à x , appelé *partie entière* de x .

(1) Rappeler l'encadrement de $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de $E(x)$.

(2) Evaluer $E(x)$ pour $x = 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ et π .

(3) Tracer le graphe de la fonction E .

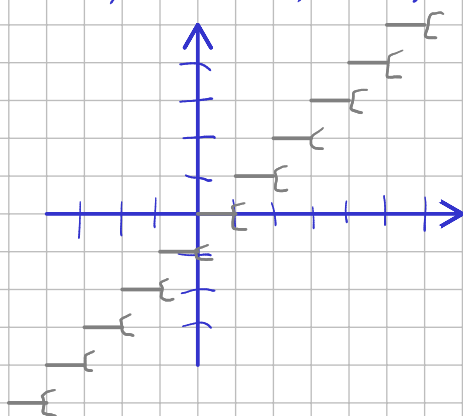
(4) Répondre aux questions suivantes :

(a) E est-elle paire ou impaire ?

(b) E est-elle croissante ou strictement croissante ?

$$(1) E(x) \leq x < E(x)+1 \quad E(x) = \max(\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\})$$

$$(2), E(1)=1, E(-1)=-1, E(\frac{1}{2})=0, E(-\frac{1}{2})=-1, E(\pi)=3.$$



E n'est ni paire ni impaire.

E est croissante car si $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Exercice 5.7. Résoudre les équations suivantes :

$$(1) \left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{8}{27}\right)^{1-2x} = \frac{2}{3}, \quad (2) 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned} 2^{2x} + 2^{2x-1} &= 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \\ &= 4^x + \frac{4^x}{2} = 3^x \sqrt{3} + \frac{3^x}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2 \times 4^x + 4^x}{2} = \frac{3^{x+1} + 3^x}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3 \times 4^x}{2} = \frac{3^x \times 4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{4^x}{2} = \frac{3^{x-1} \times 4}{\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow \frac{4^{x-1}}{2} = \frac{3^{x-1}}{\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow \sqrt{3} 4^{x-1} = 2 \times 3^{x-1} \\ &\Rightarrow \log(\sqrt{3} 4^{x-1}) = \log(2 \times 3^{x-1}) \\ &\Rightarrow \log(\sqrt{3}) + (x-1)\log(4) = \log(2) + (x-1)\log(3) \\ &\Rightarrow (x-1)(\log(12)) = \log\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Exercice 5.8. Résoudre les inéquations suivantes :

$$(1) \ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2, \quad (2) \left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{8}{27}\right)^{1-2x} \leq \frac{2}{3}.$$

(1) $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2$. Définie sur $\mathbb{R}$.

$\ln\left(\frac{|x+1|}{|2x+1|}\right) \leq \ln 2$. Comme $\ln$ est croissante, elle conserve le sens des inégalités.

$$\left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leq 2.$$

$$-2 \leq \frac{x+1}{2x+1} \leq 2.$$

$$\frac{x+1}{2x+1} \leq 2 \quad \text{et} \quad -2 \leq \frac{x+1}{2x+1}$$

$$\frac{x+1-(4x+2)}{2x+1} \leq 0,$$

$$\frac{-3x-1}{2x+1} \leq 0$$

$$-3x-1 \leq 0 \quad \text{et} \quad 2x+1 \leq 0 \quad x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \boxed{x \geq -\frac{1}{3}}$$

$$-2 \leq \frac{x+1}{2x+1} \Rightarrow 0 \leq \frac{x+1+(4x+2)}{2x+1} \Rightarrow 0 \leq \frac{5x+3}{2x+1}.$$

$$0 \leq 5x+3 \quad x \geq -\frac{3}{5},$$

$$0 \leq 2x+1 \Rightarrow \boxed{x \geq -\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Donc } x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \boxed{x \geq -\frac{1}{3}}.$$

