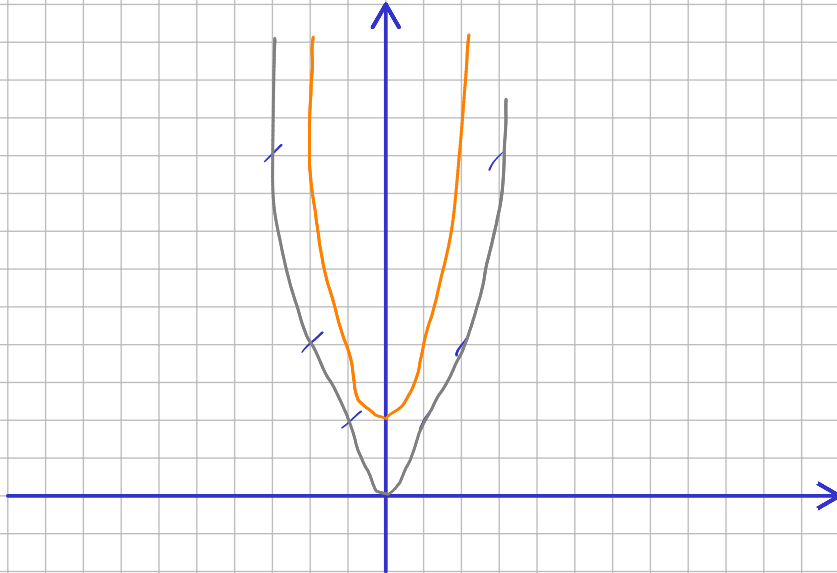


TD18: Maths

Exercice 5.4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

- (1) Justifier que f est paire.
- (2) Tracer le graphe de f , en partant du graphe de la « fonction carrée » : $x \mapsto x^2$.
- (3) Mêmes questions avec la fonction $g(x) = (x + 3)^2, x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x) \text{ o.k.}$$



$$P(x) \quad x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \neq 0.$$

$Q(x) = P(x)(x - \alpha), Q(\alpha) = 0$ α est-elle une racine de Q' ?

$$Q'(x) = P'(x)(x - \alpha) + P(x)$$

$Q'(\alpha) = 0 \Rightarrow P(\alpha) = 0. \text{ Or } P(x) \neq 0. \text{ Donc } \alpha \text{ ne peut pas être une racine de } Q'$

Exercice 5.5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |1 + x| + |x - 1| - 3$; voir aussi l'exercice 2.4.

- (1) Montrer que f est paire. Que peut-on en conclure sur son injectivité ?

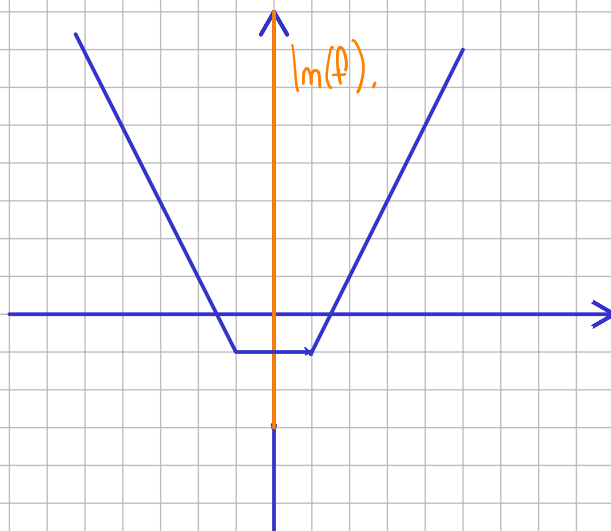
$$f(-x) = |1 - x| + |-x - 1| - 3 = |x - 1| + |x + 1| - 3 = f(x).$$

Donc f pas injective.

$$\begin{aligned} \text{si } x \geq 0, & \quad f(x) = 2x - 3 \\ \text{si } x < 0, & \quad f(x) = -2x - 3. \end{aligned}$$

- (2) Représenter le graphe de f et en déduire $\text{Im}(f)$. La fonction f est-elle surjective ?

f n'est pas surjective
car $f(x) = -7$ n'a
pas de solut^o.



(3) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

(a) $|x+1| + |x-1| = 3$, (b) $|x+1| + |x-1| \leq 3$.

(a) $x = \pm \frac{3}{2}$.

$$g(x) = |x^2 - 2x| + |x-1| - 3.$$

$$|x(x-2)| + |x-1| - 3.$$

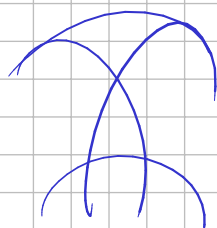
$$x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

$$|x(x-2)| \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[.$$

$$|x(x-2)| < 0 \Rightarrow x \in]0; 2[.$$

$$|x-1| \geq 0 \Rightarrow x \in [1; +\infty[. \quad \text{chiffant mais on a capté.}$$

$$|x-1| < 0 \Rightarrow x \in]-\infty; 1[.$$



Exercice 5.9. Soit $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$.

- (1) Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
- (2) Pour quelles valeurs de $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet-elle une solution ?
En déduire l'image $\text{Im}(f)$ de f .
- (3) Justifier que la fonction $f: \mathcal{D}_f \rightarrow \text{Im}(f)$ admet une réciproque qu'on donnera.

$$x > 0 \text{ et } x > -1 \Rightarrow \mathcal{D}_f =]0; +\infty[.$$

$$\ln(x+1) - \ln(x) = y \Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = y$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x} = e^y$$

$$\Rightarrow x + xe^y = x + 1$$

$$x(e^y - 1) = 1$$

$$x = \frac{1}{e^y - 1}$$

$$\frac{1}{e^y - 1} = x$$

$y \neq 0$. Si $y < 0$, $e^y - 1 < 0$ donc $y \geq 0$
 $y \neq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow y > 0$.

$$\text{Donc } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$$

$$f:]0; +\infty[\hookrightarrow \mathbb{R}_+^*.$$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \ln(g(x)+1) - \ln(g(x)) = \ln\left(\frac{1+e^y}{e^y-1}\right) - \ln\left(\frac{1}{e^y-1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+e^y}{1}\right) = \ln(e^y) = y. \end{aligned}$$

$$g(f(x)) = \frac{1}{e^{\ln(x+1) - \ln(x)} - 1} = \frac{1}{e^{\ln(x+1)} e^{-\ln(x)} - 1} = \frac{1}{(x+1)x - 1} = \frac{1}{x^2 - x - 1}$$

