

Exercice 2.12. (1) Etudier la ~~monotonie~~ ^{convergence} des suites définies ci-dessous :

(a) $u_n = \sqrt{n+3}$ (b) $u_n = 2^n - n$ (c) $u_n = \frac{2^n}{n!}$

d) $u_n = \frac{n^2}{n-2}$ (e) $u_n = 2 - \frac{1}{4^n}$.

(a). $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } n > N \Rightarrow \sqrt{n+3} > M$

$n+3 > M^2$; $n > M^2 - 3$, $N = M^2 - 3$. Donc N existe si $M \in \mathbb{N}$ et $M > 2$.
Puisque $N \in \mathbb{R}$, N existe donc u_n diverge vers $+\infty$

(c). $u_n = \frac{2^n}{n!}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$

$|\frac{2^n}{n!} - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < \frac{2^n}{n!} < l + \varepsilon$; $l = 0$.

$-\varepsilon < \frac{2^n}{n!} < \varepsilon$.

$\frac{\overbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}^{n \text{ fois}}}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}$

$2 \times A \times \frac{2}{n} < \frac{1}{n}$ car $A < 1$ par définit°.

On prend $\varepsilon = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} > N$

$M_9 \quad U_n = \frac{2\sin^2(n) - 1}{2 - \cos(2n)}$ est bornée

$$\begin{aligned}\cos(2n) &= \cos(n+n) = (\cos(n)\cos(n) - \sin(n)\sin(n)) \\ &= \cos^2(n) - \sin^2(n).\end{aligned}$$

$$-2\sin^2(n)+1 \leq \frac{2\sin^2(n)-1}{2-\cos(2n)} \leq 2\sin^2(n)-1$$

$$2 - \cos(2n) > 0; \quad -1 \leq 2\sin^2(x) - 1 \leq 1.$$

$-1 \leq 2\sin^2(x) - 1 \leq 1$ petit gap là

$$[-1; 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [0; 1].$$

$$u_n = \ln(n+2) - \ln(n).$$

$$|u_n| < \frac{1}{1000} \text{ pour } n > n_0.$$

$$\left| \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) \right| < \frac{1}{1000}.$$

$$\frac{n+2}{n} < e^{\frac{1}{1000}} \Rightarrow n - ne^{\frac{1}{1000}} < -2.$$

$$\Rightarrow n(1 - e^{\frac{1}{1000}}) < -2$$

$$\Rightarrow n > \frac{2}{1 - e^{\frac{1}{1000}}}.$$

Exercice 2.30. Étudier les suites suivantes.

$$(1) u_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n} \quad (2) u_n = \frac{1}{n^3}(1+4+\dots+n^2).$$

$$I_n = \sum_{k=1}^n 2k-1$$

$$u_n = \frac{I_n}{S_n} = \frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n n.$$

$$I_n = n^2$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{1+2+3+4+\dots+2n - (2+4+\dots+2n)}{1+2+3+4+\dots+2n} = 1 - \frac{2+4+\dots+(2n-2)+2n}{1+2+3+4+\dots+2n}$$

$$u_n = \frac{1}{n^3}(1+4+\dots+n^2)$$

$$= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + \dots}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}(\dots) \xrightarrow{0} \frac{1}{3}$$

Exercice 4.18. Soit $P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 13X^3 - 10X^2 + 20X - 8$.

- (1) Vérifier que 1 et 2 sont des racines de P et déterminer leur multiplicité.
- (2) En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

$$P(1) = \cancel{1} - \cancel{7} + \cancel{17} - \cancel{13} - \cancel{10} + \cancel{20} - \cancel{8} = 0 \text{ ok.}$$

$$\begin{aligned} P(2) &= \cancel{64} - \cancel{7(32)} + \cancel{17(16)} - \cancel{13(8)} - \cancel{10(4)} + \cancel{40} - \cancel{8} \\ &= \cancel{64} - \cancel{224} + \cancel{272} - \cancel{104} - \cancel{8} \\ &= \cancel{64} - \cancel{32} + \cancel{272} = 0 \text{ ok.} \end{aligned}$$

$$P'(x) = 6x^5 - 35x^4$$

$$F(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2-4}$$

éléments simples sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & x^2 - 4 \\ x^3 & x - 3 \\ \hline -3x^2 + 3x - 1 & \\ \hline -3x^2 + 6x - 12 & \\ \hline 3x - 11 & \end{array}$$

$$F(x) = x - 3 + \frac{3x - 11}{x^2 - 4} = \frac{3x - 11}{(x-2)(x+2)}$$

$$F(x) = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$A(x+2) + B(x-2) = 3x - 11 \quad x = -2,$$

$$-4B = -27 \Rightarrow B = \frac{27}{4}$$

$$x = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{\frac{1}{4}}{(x-2)} + \frac{\frac{27}{4}}{(x+2)} + x - 3.$$

$$F(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$F(x) = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)}.$$

