

T D2: Maths.

Exercice 1.1. Soit (S) le système suivant, d'inconnues x, y réelles :

$$(S) : \begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 & (E_1) \\ (x-2)y = 0 & (E_2) \end{cases}$$

- (1) Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations (E_1) , (E_2) ainsi que celui du système (S) .
- (2) Représenter graphiquement les résultats obtenus dans la question (1).

$$(x-1)(y-2)=0 \quad x=1 \text{ ou } y=2. \quad S=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x=1 \text{ ou } y=2\}$$

$$(x-2)y=0 \quad x=2 \text{ ou } y=0. \quad S=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x=2 \text{ ou } y=0\}$$

$$\text{Sol de } S : \{(1;0); (2;2)\}.$$



$$(7) f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[); \quad f(x) = x^2 + 1$$

$$x^2 + 1 \leq 2 \text{ ou } x^2 + 1 \geq 1. \quad f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[) = \mathbb{R}$$

$$x^2 \leq 1 \quad x^2 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad x \in \mathbb{R}.$$

nombre de ss-ensemble de $\{1, 2, 3\}$.

$$\{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}\} = 2^A$$

$$\text{card}(2^A) = 8.$$

Exercice 1.9. Soit E un ensemble non vide. Si A est une partie de E , on appelle *fonction caractéristique* de A , notée χ_A , l'application définie de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

- (1) (a) Si $f = \chi_A$ avec $A \subset E$, vérifier que $A = f^{-1}(\{1\})$.
 (b) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe $A \subset E$ vérifiant $f = \chi_A$ si et seulement si $f(E) \subset \{0, 1\}$, c-à-d : f ne prend que des valeurs dans $\{0, 1\}$.
 (2) Soient A et B deux parties de E , et notons $f = \chi_A$ et $g = \chi_B$. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

$$1 - f; \quad fg; \quad f + g - fg.$$

1a. Puisque $f^{-1}(\{1\}) = \{x \in E : \chi_A(x) = 1\}$ or $\chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$
 Donc $f^{-1}(\{1\}) = A$.

b. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Démontrer : $\exists A \subset E, f = \chi_A \Leftrightarrow f(E) \subset \{0, 1\}$
 Si $f = \chi_A$, alors $f(E) \subset \{0, 1\}$ par définition.
 Si $f(E) \subset \{0, 1\}$, alors $f(x) = 1$ ou $f(x) = 0, x \in E$
 Or, on peut construire l'ensemble $A = \{x \in E; f(x) = 1\}$ qui est une partie de E . Alors, $f = \chi_A$.

$$E = \{0, 1, \dots, n\}$$

Combien de ss-ensemble on a ?

$\equiv$ Combien de fct de E dans $\{0, 1\}$ on a ? 2^n (on peut construire un arbre binaire)

2. $A \cup B, A \cap B, A^c$ (complément de A). $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\begin{array}{l} \chi_{A \cup B} \rightarrow 1 - f \\ \chi_{A \cap B} \rightarrow fg \\ \chi_{A^c} \rightarrow f + g - fg \end{array}$$

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

$$(1; 2) \neq (2; 1) \\ \{1; 2\} = \{2; 1\}$$

Exemple : $C_4^2 = \frac{4!}{2!} \{1; 2; 3; 4\}$

$$C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = 10$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

C_n^0
 C_n^1
 C_n^2
 C_n^3
 C_n^4
 C_n^5
 C_n^6
 C_n^7
 C_n^8

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Triangle de Pascal.

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$