

# TD 20: Maths.

**Exercice 2.** On considère les suites définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}, \quad n \geq 1.$$

- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est croissante.
- Montrer que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est décroissante.
- Montrer que les deux suites sont adjacentes.
- Que peut-on en conclure ?

(a)  $u_{n+1} - u_n = \cancel{1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}} + \frac{1}{(n+1)!} - (\cancel{1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}}) = \frac{1}{(n+1)!} > 0$   
 car  $(n+1)!$  est positif. Donc  $u_n$  croissante (strictement).

(b)  $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$   $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - (u_n + \frac{1}{n!}) = \frac{1}{n!} \left( \frac{2}{n+1} - 1 \right)$   
 $\frac{2}{n+1} - 1 < 0$  donc  $-n! < 0$ . Donc  $v_{n+1} - v_n < 0$  donc  $v_n$  décroissante.

$u_n \leq v_n \Rightarrow u_n \leq u_n + \frac{1}{n!}$ , vrai car  $\frac{1}{n!} > 0$ .  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$

Donc  $u_n$  et  $v_n$  convergent vers la même limite.

**Exercice 3.** Soit  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$  et  $z_2 = \sqrt{3} + i$ .

- Calculer le module et un argument de  $z_1$  et  $z_2$ .
- En déduire le module et un argument de  $\frac{z_1}{z_2}$ .

Module de  $z_1$  || Module de  $z_2$ :  $\Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$ .

$$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2. \quad |z_2| = \sqrt{3+1} = 2$$

Argument de  $z_1$ .

$z_1 = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$   
 $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$   
 $\Rightarrow \arg(z_1) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Argument de  $z_2$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$   
 $z_2 = 2(\cos \beta + i \sin \beta)$   
 $\begin{cases} \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$   
 $\arg(z_2) = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$   
 $= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} [2\pi]$

**Exercice 4.** Soit  $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

a) Trouver les racines carrées de  $z_0$ .

b) En déduire la valeur de  $\cos(\frac{\pi}{8})$ .

Indication : on pourra développer  $(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}))^2$ .

On cherche  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\alpha^2 = z_0$ .

$$\Rightarrow \alpha = \pm \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} + i \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \right) \quad a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1.$$

$$\alpha = \pm \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2} + i \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2} \right) = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}-2}{4}} \right).$$

$$z_0 = re^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(e^{i\frac{\pi}{8}})^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$2\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\varphi = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \alpha = \pm e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}-2}{4}} \right).$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}.$$

**Exercice 5.** Soit  $P(X) = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$ .

a) Montrer que le nombre complexe  $i$  est une racine double de  $P$ .

b) Que peut-on dire de  $-i$ ?

c) En déduire une factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

$$P(X) = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1. \quad P'(X) = 6X^5 + 5X^4 + 12X^3 + 6X^2 + 6X + 1.$$

$$P(i) = i^6 + i^5 + 3i^4 + 2i^3 + 3i^2 + i + 1 = 1 - i + 3 - 2i - 3 + i + 1 = 0.$$

$$P'(i) = 6i^5 + 5i^4 + 12i^3 + 6i^2 + 6i + 1 = -6i + 5 - 12i - 6 + 6i + 1 = 0.$$

$$P^{(2)}(X) = 30X^4 + 20X^3 + 36X^2 + 12X + 6.$$

$$P^{(2)}(i) = 30i^4 + 20i^3 + 36i^2 + 12i + 6 = 30 - 20i - 36 + 12i + 6 = -8i \neq 0$$

Donc  $i$  est une racine double de  $P$ , d'après le théorème de Viète.

Si  $z$  est une racine d'un polynôme, alors  $\bar{z}$  est aussi une racine du polynôme.

Donc  $-i$  est aussi une racine double de  $P$ .

$$P(X) = (X+i)^2 (X-i)^2 Q(X).$$

$$= (X^2+1)^2 Q(X).$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{X^6} + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1 & X^4 + 2X^2 + 1 \\ - \cancel{X^6} - 2X^4 & X^2 + X + 1 \\ \hline X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 & \\ - \cancel{X^5} - 2X^3 & -X \\ \hline X^4 + 2X^2 + 1 & \\ - \cancel{X^4} - 2X^2 & \\ \hline 1 & \\ 0 & \end{array}$$

Donc  $P(X) = (X^2+1)^2 (X^2+X+1)$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 1.** On considère la suite de réels définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ .

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $1 \leq u_n \leq 2$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- En déduire que la suite est convergente et si  $\ell$  est sa limite, justifier que  $\ell = \sqrt{2+\ell}$ .
- En déduire la valeur de  $\ell$ .
- Soit

$$A = \{-5\} \cup \{0\} \cup \{u_n : n \geq 0\}.$$

Déterminer la borne supérieure et inférieure de  $A$ . On justifiera.

a.  $n=0 \Rightarrow 1 \leq 1 \leq 2$ , ok,  
supposons  $n$  vrai, montrons  $n+1$ .

$$1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 3+u_n \leq 4 \Rightarrow \sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 2$$

on a  $1 \leq u_n \leq \sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 2$ .  $\Rightarrow 1 \leq \sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 2$ , ok  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Donc  $u_n \leq u_{n+1}$ , Donc  $u_n \nearrow$ .

$u_n$  est croissante et majorée, donc  $u_n$  converge vers  $\ell$ .

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2+u_n} \Rightarrow \ell = \sqrt{2+\ell}.$$

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0 \Rightarrow \ell = \frac{1+3}{2} = 2, \ell = \frac{1-3}{2} \text{ pas racine car } 1 \leq u_n \leq 2.$$

$$A = \{-5\} \cup \{0\} \cup \{u_n : n \geq 0\}. \quad \text{On a } 1 \leq u_n \leq 2$$

$$\text{Donc } A = \{-5\} \cup \{0\} \cup [1; 2]$$

$$\inf(A) = a \in A, \forall x \in A, a \leq x \Rightarrow a = -5. \quad \min(A) = -5$$

$$\sup(A) = a \in A, \forall x \in A, x \leq a \Rightarrow a = 2. \quad \max(A) \text{ n'existe pas}$$

