TD23 : Maths.

$$(3) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2x}, \qquad (4) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2+|x|}{x},$$

$$(5) \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^3-1},$$

$$(3) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{1})}{2x(\sqrt{x+1}+\sqrt{1})}.$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{2x(\sqrt{x+1}+1)} \overset{\lim}{\downarrow}= \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)} \overset{\lim}{\downarrow}= \frac{1}{2(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{4}.$$

$$(5) \quad \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^3-1} = \frac{(\sqrt[3]{x}-1)((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1)}{(x^3-1)(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$= \frac{1}{(x^2+x+1)(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1)} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{9}$$

$$(4) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2+|x|}{x} \leftarrow f(x) \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x-1 = -1.$$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+|x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+|x|}{x}$ donc la limite n'existe pas.

Exercice 6.6. Soit $E: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & E(x) \end{array}$ la fonction *partie entière* étudiée dans l'exercice 5.3.

(1) Si $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\lim_{x\to n^+} E(x)$ et $\lim_{x\to n^-} E(x)$.

(2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\lim_{x\to a} E(x) = a$ si et seulement si $a \notin \mathbb{Z}$. $E(a)$.

(3) Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0^+} x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$, (b) $\lim_{x\to +\infty} x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$, (c) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,E\left(\frac{1}{x}\right)$.

(1). $\lim_{x\to n^+} E(x) = n$, $\lim_{x\to n^-} E(x) = n-1$.

(2) $\lim_{x\to a} E(x) = E(a)$ ssi $a \notin \mathbb{Z}$ la q1,

Donc $E(x)$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Mq $\sin(\pi x) E(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

si $x = 0\,[2]$, $\sin(\pi x) = \sin(0) = 0$.

si $x = 1\,[2]$, $\sin(\pi x) = \sin(\pi) = 0$.

$$\sin(\pi x) E(x) \begin{cases} \sin(\pi x) E(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}. \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$\lim_{x\to a\in\mathbb{Z}} \sin(\pi x) E(x) = \sin(0) E(0) = 0$. car $E(x)$ fini

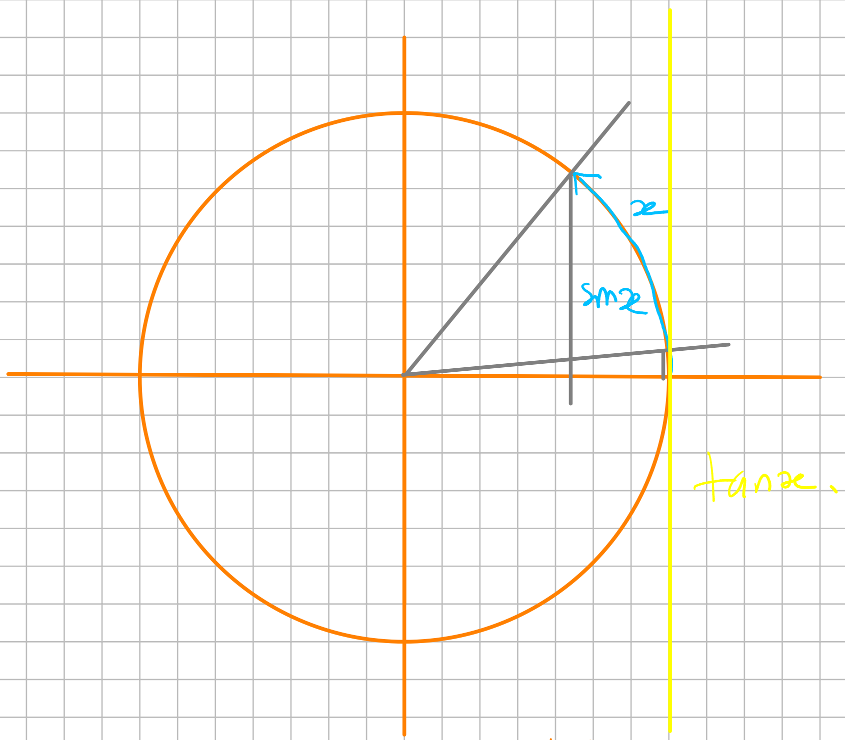
Donc, puisque $\sin(\pi x)$ et $E(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

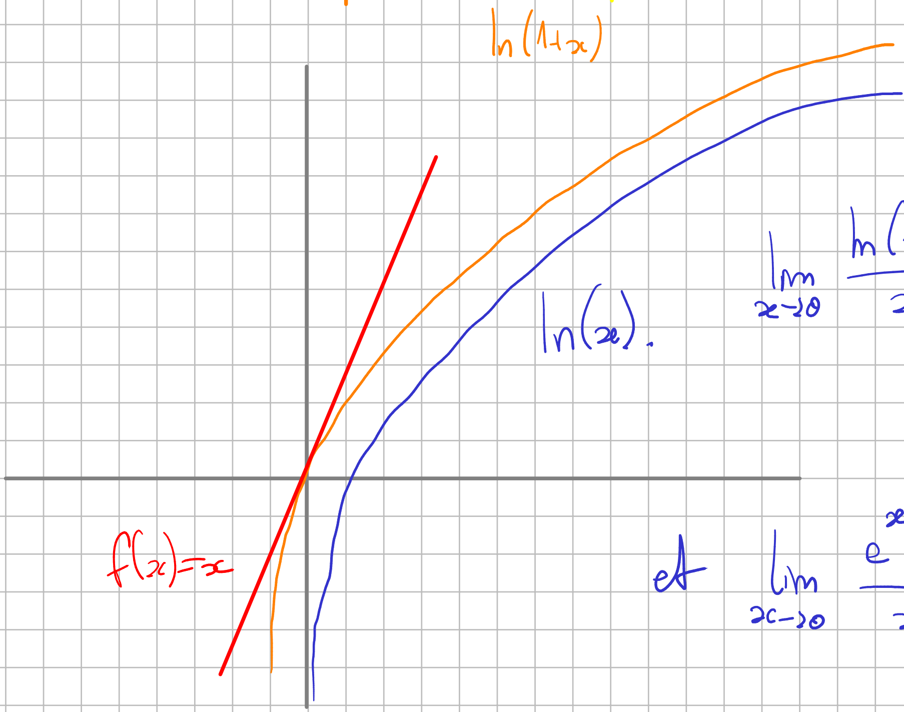
$\sin(\pi x) E(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

3a, $\lim_{x\to 0^+} x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$.

$x = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} E(n) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ ; \ \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$





$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

et $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$

$$\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin(2x)}{2x} = 2.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x\sin(3x)}{3x\sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin(2x)} \times \frac{2x}{2x} = \frac{3}{2}.$$

$$(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x+x^2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(2x)}{2x(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+x} = 2.$$

(1) En utilisant la relation $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$, montrer que $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad 1-\cos(x) = 1-2\sin^2\frac{x}{2}.$$

$$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} = \frac{1-2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x^2}{2}\right)}$$